תודה רב לספר חזון שמיים להרב איתן צקוני
שלקחתי ממנו הטבלאות!

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק יג

הלכה א
אם תרצה לידע מקום השמש האמתי בכל יום שתרצה, תוציא תחלה מקומה האמצעי לאותו היום על הדרך שביארנו, ותוציא מקום גובה השמש, ותגרע מקום גובה השמש ממקום השמש האמצעי והנשאר הוא הנקרא מסלול השמש.

הלכה ב
ותראה כמה מעלות הוא מסלול השמש, אם היה המסלול פחות ממאה ושמונים מעלות, תגרע מנת המסלול ממקום השמש האמצעי, ואם היה המסלול יתר על מאה ושמונים מעלות עד שלש מאות וששים תוסיף מנת המסלול על מקום השמש האמצעי, ומה שיהיה אחר שתוסיף עליו או תגרע ממנו הוא המקום האמתי.

הלכה ג
ודע שאם יהיה המסלול מאה ושמונים בשוה או שלש מאות וששים בשוה, אין לו מנה אלא יהיה המקום האמצעי הוא המקום האמתי.

הלכה ד
וכמה היא מנת המסלול, אם יהיה המסלול עשר מעלות, תהיה מנתו עשרים חלקים, ואם יהיה עשרים מעלות תהיה מנתו ארבעים חלקים, ואם יהיה שלשים מעלות תהיה מנתו שמונה וחמשים חלקים, ואם יהיה ארבעים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת וחמשה עשר חלקים, ואם יהיה חמשים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ותשעה ועשרים חלקים, ואם יהיה ששים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ואחד וארבעים חלקים, ואם יהיה שבעים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ואחד וחמשים חלקים, ואם יהיה שמונים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ושבעה וחמשים חלקים, ואם יהיה תשעים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ותשעה וחמשים חלקים, ואם יהיה מאה מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ושמונה וחמשים חלקים, ואם יהיה מאה ועשר תהיה מנתו מעלה אחת ושלשה וחמשים חלקים, ואם יהיה מאה ועשרים תהיה מנתו מעלה אחת וחמשה וארבעים חלקים, ואם יהיה מאה ושלשים תהיה מנתו מעלה אחת ושלשה ושלשים חלקים, ואם יהיה מאה וארבעים תהיה מנתו מעלה אחת ותשעה עשר חלקים, ואם יהיה מאה וחמשים תהיה מנתו מעלה אחת וחלק אחד, ואם יהיה מאה וששים תהיה מנתו שנים וארבעים חלקים, ואם יהיה מאה

ושבעים תהיה מנתו אחד ועשרים חלקים, ואם יהיה מאה ושמונים בשוה אין לו מנה כמו שביארנו אלא מקום השמש האמצעי הוא מקומה האמתי.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 |
| 0-20 | 0-40 | 0-58 | 1-15 | 1-29 | 1-41 | 1-51 | 1-57 | 1-59 | 1-58 | 1-53 | 1-45 | 1-33 | 1-19 | 1-1 | 0-42 | 0-21 | 0-0 |

הלכה ה
היה המסלול יתר על מאה ושמונים מעלות, תגרע אותו משלש מאות וששים מעלות ותדע מנתו, כיצד הרי שהיה המסלול מאתים מעלות, תגרע אותו משלש מאות וששים תשאר מאה וששים מעלות, וכבר הודענו שמנת מאה וששים מעלות שנים וארבעים חלקים, וכן מנת המאתים שנים וארבעים חלקים.

הלכה ו
וכן אם היה המסלול שלש מאות מעלות, תגרע אותו משלש מאות וששים ישאר ששים, וכבר ידעת שמנת ששים מעלות מעלה אחת ואחד וארבעים חלקים, וכן היא מנת השלש מאות מעלות, ועל דרך זו בכל מנין ומנין.

הלכה ז
הרי שהיה המסלול חמש וששים מעלות, וכבר ידענו שמנת הששים היא מעלה אחת ואחד וארבעים חלקים, ומנת השבעים היא מעלה אחת ואחד וחמשים חלקים, נמצא בין שתי המנות עשרה חלקים, ולפי חשבון המעלות יהיה לכל מעלה חלק אחד, ויהיה מנת המסלול שהוא חמש וששים מעלה אחת וששה וארבעים חלקים.

הלכה ח
וכן אילו היה המסלול שבע וששים היתה מנתו מעלה אחת ושמונה וארבעים חלקים, ועל דרך זו תעשה בכל מסלול שיהיה במניינו אחדים עם העשרות, בין בחשבון השמש בין בחשבון הירח.

הלכה ט
כיצד הרי שרצינו לידע מקום השמש האמתי בתחלת ליל השבת ארבעה עשר יום לחדש תמוז משנה זו, תוציא אמצע השמש תחלה לעת הזאת, וסימנו ק"ה ל"ז כ"ה כמו שביארנו,

ותוציא מקום גובה השמש לעת הזאת, יצא לך סימנו פ"ו מ"ה כ"ג, ותגרע מקום הגובה מן האמצעי, יצא לך המסלול שמונה עשרה מעלות ושנים וחמשים חלקים ושתי שניות, סימנם י"ח נב"ב, ואל תקפיד בכל מסלול על החלקים אלא אם יהיו פחות משלשים אל תפנה אליהם, ואם היו שלשים או יתר תחשוב אותם מעלה אחת ותוסיף אותה על מנין מעלות המסלול, לפיכך יהיה מסלול זה תשע עשרה מעלות ותהיה מנתו על הדרך שביארנו שמונה ושלשים חלקים.

הלכה י
ולפי שהמסלול הזה היה פחות ממאה ושמונים, תגרע המנה שהיא שמונה ושלשים חלקים מאמצע השמש ישאר מאה וארבע מעלות ותשעה וחמשים חלקים וחמש ועשרים שניות, סימנם ק"ד נ"ט כ"ה, ונמצא מקום השמש האמתי בתחלת ליל זה במזל סרטן בחמש עשרה מעלות בו פחות (ל"ה) שניות, ואל תפנה אל השניות כלל לא במקום השמש ולא במקום הירח ולא בשאר חשבונות הראייה, אלא חקור על החלקים בלבד, ואם יהיו השניות קרוב לשלשים עשה אותם חלק והוסיפו על החלקים.

הלכה יא
ומאחר שתדע מקום השמש בכל עת שתרצה, תדע יום התקופה האמתי כל תקופה שתרצה, בין תקופות הבאות אחר עיקר זה שממנו התחלנו, בין תקופות שעברו משנים קדמוניות.

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק יד

הלכה א
הירח שני מהלכים אמצעיים יש לו, הירח עצמו מסבב בגלגל קטן שאינו מקיף את העולם (כולו), ומהלכו האמצעי באותו הגלגל הקטן נקרא אמצע המסלול, והגלגל הקטן עצמו מסבב בגלגל גדול המקיף את העולם, ומהלך אמצעי זה שלגלגל הקטן באותו הגלגל הגדול המקיף את העולם הוא הנקרא אמצע הירח.

הלכה ב
מהלך אמצע הירח ביום אחד שלש עשרה מעלות ועשרה חלקים וחמש ושלשים שניות, סימנם י"ג יל"ה נמצא מהלכו בעשרה ימים מאה ואחת ושלשים מעלות וחמשה וארבעים חלקים וחמשים שניות, סימנם קל"א מה"נ, ונמצא שארית מהלכו במאה יום מאתים ושבע ושלשים מעלות ושמונה ושלשים חלקים ושלש ועשרים שניות, סימנם רל"ז ל"ח כ"ג, ונמצא שארית מהלכו באלף יום מאתים ושש עשרה מעלות ושלשה ועשרים חלקים

וחמשים שניות, סימנם רי"ו כג"נ, ונמצא שארית מהלכו בעשרת אלפים יום שלש מעלות ושמונה וחמשים חלקים ועשרים שניות, סימנם ג' נ"ח כ', ונמצא שארית מהלכו בתשעה ועשרים יום שתים ועשרים מעלות וששה חלקים ושש וחמשים שניות, סימנם כב"ו נ"ו, ונמצא שארית מהלכו בשנה סדורה שלש מאות וארבע וארבעים מעלות וששה ועשרים חלקים ושלש וארבעים שניות, סימן להם שמ"ד כ"ו מ"ג, ועל דרך זו תכפול לכל מנין ימים או שנים שתרצה.

הלכה ג

ומהלך אמצע המסלול ביום אחד שלש עשרה מעלות ושלשה חלקים וארבע וחמשים שניות, סימנם י"ג גנ"ד, נמצא מהלכו בעשרה ימים מאה ושלשים מעלות תשעה ושלשים חלקים בלא שניות, סימנם ק"ל ל"ט, ונמצא שארית מהלכו במאה יום מאתים ושש ועשרים מעלות ותשעה ועשרים חלקים ושלש וחמשים שניות, סימנם רכ"ו כ"ט נ"ג, ונמצא שארית מהלכו באלף יום מאה וארבע מעלות ושמונה וחמשים חלקים וחמשים שניות, סימנם ק"ד נח"נ, ונמצא שארית מהלכו בעשרת אלפים יום שלש מאות ותשע ועשרים מעלות ושמונה וארבעים חלקים ועשרים שניות, סימנם שכ"ט מח"כ, ונמצא שארית מהלכו בתשעה ועשרים יום שמונה עשרה מעלות ושלשה וחמשים חלקים וארבע שניות, סימנם י"ח נג"ד.

הלכה ד

ונמצא שארית מהלכו בשנה סדורה שלש מאות וחמש מעלות ושלש עשרה שניות בלא חלק, סימנם ש"ה י"ג. מקום אמצע הירח היה בתחלת ליל חמישי שהוא העיקר לחשבונות אלו במזל שור מעלה אחת וארבעה עשר חלקים ושלש וארבעים שניות, סימנם (א) [ל"א] י"ד מ"ג, ואמצע המסלול היה בעיקר זה ארבע ושמונים מעלות ושמונה ועשרים חלקים ושתים וארבעים שניות, סימנם פ"ד כ"ח מ"ב. מאחר שתדע מהלך אמצע הירח והאמצע שהוא העיקר שעליו תוסיף, תדע מקום אמצע הירח בכל יום שתרצה על דרך שעשית באמצע השמש, ואחר שתוציא אמצע הירח לתחלת הלילה שתרצה התבונן בשמש ודע באיזה מזל הוא.

הלכה ה

אם היתה השמש מחצי מזל דגים עד חצי מזל טלה, תניח אמצע הירח כמות שהוא, ואם תהיה השמש מחצי מזל טלה עד תחלת מזל תאומים, תוסיף על אמצע הירח חמשה עשר חלקים, ואם תהיה השמש מתחלת מזל תאומים עד תחלת מזל אריה, תוסיף על אמצע הירח שלשים חלקים, ואם תהיה השמש מתחלת מזל אריה עד חצי מזל בתולה תוסיף על אמצע הירח חמשה עשר חלקים, ואם תהיה השמש מחצי מזל בתולה עד חצי מאזנים, הנח אמצע הירח כמות שהוא, ואם תהיה השמש מחצי מאזנים עד תחלת מזל קשת, תגרע מאמצע הירח חמשה עשר חלקים, ואם תהיה השמש מתחלת מזל קשת עד תחלת

מזל דלי, תגרע מאמצע הירח שלשים חלקים, ואם תהיה השמש מתחלת מזל דלי עד חצי דגים, תגרע מאמצע הירח חמשה עשר חלקים.

| 345-15 | 15-60 | 60-120 | 120-165 | 165-195 | 195-240 | 240-300 | 300-345 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 15 | 30 | 15 | 0 | -15 | -30 | -15 |

הלכה ו
ומה שיהיה האמצע אחר שתוסיף עליו או תגרע ממנו או תניח אותו כמות שהוא, הוא אמצע הירח לאחר שקיעת החמה בכמו שליש שעה באותו הזמן שתוציא האמצע לו, וזה הוא הנקרא אמצע הירח לשעת הראייה.

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק טו

הלכה א
אם תרצה לידע מקום הירח האמתי בכל יום שתרצה, תוציא תחלה אמצע הירח לשעת הראייה לאותו הלילה שתרצה, וכן תוציא אמצע המסלול ואמצע השמש לאותו העת, ותגרע אמצע השמש מאמצע הירח, והנשאר תכפול אותו, וזה הוא הנקרא מרחק הכפול.

הלכה ב
וכבר הודענו שלא באנו בכל אלו החשבונות שעשינו בפרקים אלו אלא לדעת ראיית הירח, ולעולם אי אפשר שיהיה מרחק זה הכפול בליל הראייה שיראה בה הירח אלא מחמש מעלות עד שתים וששים מעלות, ואי אפשר שיוסיף על זה ולא יגרע ממנו.

הלכה ג
והואיל והדבר כן, התבונן במרחק זה הכפול, אם יהיה המרחק הכפול חמש מעלות או קרוב לחמש אין חוששין לתוספת ולא תוסיף כלום, ואם יהיה המרחק הכפול משש מעלות עד אחת עשרה מעלות תוסיף על אמצע המסלול מעלה אחת, ואם יהיה המרחק הכפול משתים עשרה מעלות עד שמונה עשרה מעלות תוסיף על אמצע המסלול שתי מעלות, ואם יהיה המרחק הכפול מתשע עשרה מעלות עד ארבע ועשרים מעלות תוסיף על אמצע המסלול שלש מעלות, ואם יהיה המרחק הכפול מחמש ועשרים מעלות עד אחת ושלשים מעלות תוסיף על אמצע המסלול ארבע מעלות, ואם יהיה המרחק הכפול משתים ושלשים מעלות עד שמונה ושלשים מעלות תוסיף על אמצע המסלול חמש מעלות, ואם יהיה

המרחק הכפול מתשע ושלשים מעלות עד חמש וארבעים מעלות תוסיף על אמצע המסלול שש מעלות, ואם יהיה המרחק הכפול משש וארבעים מעלות עד אחת וחמשים מעלות תוסיף על אמצע המסלול שבע מעלות, ואם יהיה המרחק הכפול משתים וחמשים מעלות עד תשע וחמשים מעלות תוסיף על אמצע המסלול שמונה מעלות, ואם יהיה המרחק הכפול מששים מעלות עד שלש וששים מעלות תוסיף על אמצע המסלול תשע מעלות, ומה שיהיה אמצע המסלול אחר שתוסיף עליו מעלות אלו הוא הנקרא מסלול הנכון.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6-11 | 12-18 | 19-24 | 25-31 | 32-38 | 39-45 | 46-51 | 52-59 | 60-63 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

הלכה ד

ואחר כך תראה כמה מעלות הוא המסלול הנכון, אם היה פחות ממאה ושמונים מעלות תגרע מנת המסלול הזה הנכון מאמצע הירח לשעת הראייה, ואם היה המסלול הנכון יתר על מאה ושמונים מעלות עד שלש מאות וששים תוסיף מנת זה המסלול הנכון על אמצע הירח לשעת הראייה, ומה שיהיה האמצע אחר שתוסיף עליו או תגרע ממנו הוא מקום הירח האמתי לשעת הראייה.

הלכה ה

ודע שאם יהיה המסלול הנכון מאה ושמונים בשוה או שלש מאות וששים בשוה אין לו מנה, אלא יהיה מקום הירח האמצעי לשעת הראייה הוא מקומו האמתי.

הלכה ו

וכמה היא מנת המסלול, אם יהיה המסלול הנכון עשר מעלות תהיה מנתו חמשים חלקים, ואם יהיה המסלול הנכון עשרים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ושמונה ושלשים חלקים, ואם יהיה שלשים תהיה מנתו שתי מעלות וארבעה ועשרים חלקים, ואם יהיה ארבעים תהיה מנתו שלש מעלות וששה חלקים, ואם יהיה חמשים תהיה מנתו שלש מעלות וארבעה וארבעים חלקים, ואם יהיה ששים תהיה מנתו ארבע מעלות וששה עשר חלקים, ואם יהיה שבעים תהיה מנתו ארבע מעלות ואחד וארבעים חלקים, ואם יהיה שמונים תהיה מנתו חמש מעלות, ואם יהיה תשעים תהיה מנתו חמש מעלות וחמשה חלקים, ואם יהיה מאה תהיה מנתו חמש מעלות ושמונה חלקים, ואם יהיה מאה ועשר תהיה מנתו ארבע מעלות ותשעה וחמשים חלקים, ואם יהיה מאה ועשרים תהיה מנתו ארבע מעלות וארבעים חלקים, ואם יהיה מאה ושלשים תהיה מנתו ארבע מעלות ואחד עשר חלקים, ואם יהיה מאה וארבעים תהיה מנתו שלש מעלות ושלשה ושלשים חלקים, ואם יהיה מאה וחמשים תהיה מנתו שתי מעלות ושמונה וארבעים חלקים, ואם יהיה מאה וששים תהיה

מנתו מעלה אחת וששה וחמשים חלקים, ואם יהיה מאה ושבעים תהיה מנתו תשעה וחמשים חלקים, ואם יהיה מאה ושמונים בשוה אין לו מנה כמו שאמרנו אלא מקום הירח האמצעי הוא המקום האמתי.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 170 | 160 | 150 | 140 | 130 | 120 | 110 | 100 | 90 | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 |
| 0-59 | 1-56 | 2-48 | 3-33 | 4-11 | 4-40 | 4-59 | 5-08 | 5-08 | 5-00 | 4-41 | 4-16 | 3-44 | 3-06 | 2-24 | 1-38 | 0-50 |

[יש קצת תיקונים לפי כת"י אוקספורד  הובא בספרו של הרב אברהם קליקשטיין זצ"ל]

הלכה ז
ואם יהיה המסלול הנכון יתר על מאה ושמונים מעלות, תגרע אותו משלש מאות וששים ותדע מנתו כדרך שעשית במסלול השמש, וכן אם יהיו במנין המסלול אחדים עם העשרות תקח מן היתר שבין שתי המנות כפי האחדים, כדרך שביארנו במסלול השמש במנות שלו כך תעשה במסלול הנכון במנות שלו.

הלכה ח
כיצד הרי שרצינו לידע מקום הירח האמתי בתחלת ליל ערב שבת שיומו שני לחדש אייר משנה זו שהיא שנת העיקר, ומנין הימים הגמורים מתחלת ליל העיקר עד תחילת ליל זה שאנו רוצים לידע מקום הירח האמתי בו תשעה ועשרים יום, תוציא אמצע השמש תחלה לליל זה, יצא לך אמצעה חמש ושלשים מעלות ושמונה ושלשים חלקים ושלש ושלשים שניות, סימנם ל"ה ל"ח ל"ג, ותוציא אמצע הירח לשעת הראייה לעת זו, יצא לך אמצעו שלש וחמשים מעלות וששה ושלשים חלקים ותשע ושלשים שניות, סימנם נ"ג ל"ו ל"ט, ותוציא אמצע המסלול לעת זו יצא לך אמצעו מאה ושלש מעלות ואחד ועשרים חלקים ושש וארבעים שניות, סימנם ק"ג כ"א מ"ו, תגרע אמצע השמש מאמצע הירח ישאר שבע עשרה מעלות ושמונה וחמשים חלקים ושש שניות, וזה הוא המרחק, תכפול אותו יצא לך המרחק הכפול חמש ושלשים מעלות ושש וחמשים חלקים ושתים עשרה שניות, סימנם ל"ה נ"ו י"ב, לפיכך תוסיף על אמצע המסלול חמש מעלות כמו שהודענו ויצא לך המסלול הנכון מאה ושמונה מעלות ואחד ועשרים חלקים ואין מקפידין על החלקים במסלול כדרך שביארנו בשמש.

הלכה ט
ובאנו לחקור על מנת זה המסלול הנכון שהוא מאה ושמונה נמצאת מנה שלו חמש מעלות וחלק אחד, ולפי שהמסלול הנכון היה פחות ממאה ושמונים תגרע המנה שהוא חמש

מעלות וחלק אחד מן אמצע הירח, ישאר שמונה וארבעים מעלות וחמשה ושלשים חלקים ותשע ושלשים שניות, תעשה השניות חלק ותוסיף על החלקים, ונמצא מקום הירח האמתי בשעה זו במזל שור בשמונה עשרה מעלות וששה ושלשים חלקים ממעלת תשע עשרה, סימנם י"ח ל"ו, ועל הדרך הזה תדע מקום הירח האמתי בכל עת ראייה שתרצה מתחלת שנה זו שהיא העיקר עד סוף העולם.

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק טז

הלכה א
העגולה שסובבת בה הירח תמיד היא נוטה מעל העגולה שסובבת בה השמש תמיד, חציה נוטה לצפון וחציה נוטה לדרום, ושתי נקודות יש בה זו כנגד זו שבהן פוגעות שתי העגולות זו בזו, לפיכך כשיהיה הירח באחת משתיהן נמצא סובב בעגולה של שמש כנגד השמש בשוה, ואם יצא הירח מאחת משתי הנקודות נמצא מהלך לצפון השמש או לדרומה. הנקודה שממנה יתחיל הירח לנטות לצפון השמש היא הנקראת ראש, והנקודה שממנה יתחיל הירח לנטות לדרום השמש היא הנקראת זנב, ומהלך שוה יש לזה הראש שאין בו לא תוספת ולא גרעון, והוא הולך במזלות אחורנית מטלה לדגים לדלי וכן הוא סובב תמיד.

הלכה ב
מהלך הראש האמצעי ביום אחד שלשה חלקים ואחת עשרה שניות, נמצא מהלכו בעשרה ימים אחד ושלשים חלקים ושבע וארבעים שניות, ונמצא מהלכו במאה יום חמש מעלות ושבעה עשר חלקים ושלש וארבעים שניות, סימנם הי"ז מ"ג, ונמצא מהלכו באלף יום שתים וחמשים מעלות ושבעה וחמשים חלקים ועשר שניות, סימנם נ"ב נז"י, ונמצא שארית מהלכו בעשרת אלפים יום מאה ותשע וששים מעלות ואחד ושלשים חלקים וארבעים שניות, סימנם קס"ט לא"מ, ונמצא מהלכו לתשעה ועשרים יום מעלה אחת ושנים ושלשים חלקים ותשע שניות, סימנם א' לב"ט, ונמצא מהלכו לשנה סדורה שמונה עשרה מעלות וארבעה וארבעים חלקים ושתים וארבעים שניות, סימנם י"ח מ"ד מ"ב, ואמצע הראש בתחלת ליל חמשי שהוא העיקר היה מאה ושמונים מעלות ושבעה וחמשים חלקים ושמונה ועשרים שניות סימנם ק"פ נ"ז כ"ח.

הלכה ג
אם תרצה לידע מקום הראש בכל עת שתרצה, תוציא אמצעו לאותה העת כדרך שתוציא אמצע השמש ואמצע הירח, ותגרע האמצע משלש מאות וששים מעלות, והנשאר הוא מקום הראש באותה העת, וכנגדו לעולם יהיה מקום הזנב.

הלכה ד
כיצד הרי שרצינו לידע מקום הראש לתחלת ליל ערב שבת שיומו שני לחדש אייר משנה זו שהיא שנת העיקר, ומנין הימים הגמורים מתחלת ליל העיקר עד תחלת ליל זו שאנו רוצים לידע מקום הראש בו תשעה ועשרים יום.

הלכה ה
תוציא אמצע הראש לעת הזאת על הדרך שידעת, והוא שתוסיף מהלכו לתשעה ועשרים יום על העיקר, יצא לך אמצע הראש מאה ושתים ושמונים מעלות ותשעה ועשרים חלקים ושבע ושלשים שניות, סימנם קפ"ב כ"ט ל"ז, תגרע אמצע זה משלש מאות וששים ישאר לך מאה ושבע ושבעים מעלות ושלשים חלקים ושלש ועשרים שניות, סימנם קע"ז לכ"ג, וזה הוא מקום הראש, ואל תפנה אל השניות, נמצא מקום הראש במזל בתולה בשבע ועשרים מעלות ושלשים חלקים, ומקום הזנב כנגדו במזל דגים בשבע ועשרים מעלות ושלשים חלקים.

הלכה ו
לעולם יהיה בין הראש ובין הזנב חצי הגלגל בשוה, לפיכך כל מזל שתמצא בו מקום הראש יהיה הזנב במזל שביעי ממנו בכמו מנין המעלות והחלקים בשוה, אם יהיה הראש בעשר מעלות במזל פלוני יהיה הזנב בעשר מעלות ממזל שביעי ממנו.

הלכה ז
ומאחר שתדע מקום הראש ומקום הזנב ומקום הירח האמתי, התבונן בשלשתן, אם מצאת הירח עם הראש או עם הזנב במעלה אחת וחלק אחד, תדע שאין הירח נוטה לא לצפון השמש ולא לדרומה, ואם ראית מקום הירח לפני מקום הראש והוא הולך כנגד הזנב, תדע שהירח נוטה לצפון השמש, ואם היה הירח לפני מקום הזנב והרי הוא הולך כנגד הראש, תדע שהירח נוטה לדרום השמש.

הלכה ח
הנטיה שנוטה הירח לצפון השמש או לדרומה, היא הנקראת רוחב הירח, ואם היה נוטה לצפון נקרא רוחב צפוני, ואם היה נוטה לדרום נקרא רוחב דרומי, ואם היה הירח באחת משתי הנקודות לא יהיה לו רוחב כמו שביארנו.

הלכה ט
לעולם לא יהיה רוחב הירח יתר על חמש מעלות בין בצפון בין בדרום, אלא כך הוא דרכו יתחיל מן הראש ויתרחק ממנו מעט מעט, והמרחק הולך ונוסף עד שיגיע לחמש מעלות,

ויחזור ויתקרב מעט מעט עד שלא יהיה לו רוחב כשיגיע לזנב, ויחזור ויתרחק מעט מעט והמרחק נוסף עד שיגיע לחמש מעלות, ויחזור ויתקרב עד שלא יהיה לו רוחב.

הלכה י
אם תרצה לידע רוחב הירח כמה הוא בכל עת שתרצה, ואם צפוני הוא או דרומי, תוציא מקום הראש ומקום הירח האמתי לאותה העת, ותגרע מקום הראש ממקום הירח האמתי, והנשאר הוא הנקרא מסלול הרוחב, ואם יהיה מסלול הרוחב ממעלה אחת עד מאה ושמונים, תדע שרוחב הירח צפוני, ואם היה המסלול יתר על מאה ושמונים תדע שרוחב הירח דרומי, ואם היה מאה ושמונים בשוה או שלש מאות וששים בשוה אין לירח רוחב כלל, ותחזור ותראה מנת מסלול הרוחב כמה היא, והוא שיעור נטייתו לצפון או לדרום, והוא הנקרא רוחב הירח הדרומי או הצפוני כמו שביארנו.

הלכה יא
וכמה היא מנת מסלול הרוחב, אם יהיה מסלול הרוחב עשר מעלות תהיה מנתו שתים וחמשים חלקים, ואם יהיה המסלול הזה עשרים מעלות תהיה מנתו מעלה אחת ושלשה וארבעים חלקים, ואם יהיה המסלול שלשים תהיה מנתו שתי מעלות ושלשים חלקים, ואם יהיה המסלול ארבעים תהיה מנתו שלש מעלות ושלשה עשר חלקים, ואם יהיה המסלול חמשים מעלות תהיה מנתו שלש מעלות וחמשים חלקים, ואם יהיה המסלול ששים תהיה מנתו ארבע מעלות ועשרים חלקים, ואם יהיה המסלול שבעים תהיה מנתו ארבע מעלות ושנים וארבעים חלקים, ואם יהיה המסלול שמונים תהיה מנתו ארבע מעלות וחמשה וחמשים חלקים, ואם יהיה המסלול תשעים תהיה מנתו חמש מעלות.

הלכה יב
ואם יהיו אחדים עם העשרות תקח הראוי להם לפי היתר שבין שתי המנות כמו שעשית במסלול השמש ובמסלול הירח, כיצד הרי שהיה מסלול הרוחב שלש וחמשים מעלות, וכבר ידעת שאילו היה המסלול חמשים היתה מנתו שלש מעלות וחמשים חלקים, ואילו היה המסלול ששים היתה מנתו ארבע מעלות ועשרים חלקים, נמצא היתר בין שתי המנות שלשים חלקים שלשה חלקים לכל מעלה, ונמצא לפי חשבון מסלול זה שהוא שלש וחמשים מנתו שלש מעלות ותשעה וחמשים חלקים, ועל דרך זו תעשה בכל מנין ומנין.

הלכה יג
מאחר שתדע מנות של מסלול הרוחב עד תשעים כמו שהודענוך, תדע מנות של כל מניינות המסלול, שאם יהיה המסלול יתר על תשעים עד מאה ושמונים תגרע המסלול ממאה ושמונים והנשאר תדע בו המנה.

הלכה יד
(וזה הוא רוחב הירח בתחלת ליל זה, והוא דרומי שהרי המסלול יתר על מאה ושמונים), וכן אם היה המסלול יתר ממאה ושמונים עד מאתים ושבעים תגרע ממנו מאה ושמונים והנשאר תדע בו המנה.

הלכה טו
ואם היה המסלול יתר על מאתים ושבעים עד שלש מאות וששים, תגרע אותו משלש מאות וששים והנשאר תדע בו המנה.

הלכה טז
כיצד הרי שהיה המסלול מאה וחמשים תגרע אותו ממאה ושמונים נשאר שלשים, וכבר ידעת שמנת שלשים שתי מעלות ושלשים חלקים וכך תהיה מנת מאה וחמשים שתי מעלות ושלשים חלקים.

הלכה יז
הרי שהיה המסלול מאתים, תגרע ממנו מאה ושמונים ישאר עשרים, וכבר ידעת שמנת עשרים היא מעלה אחת ושלשה וארבעים חלקים, וכך תהיה מנת מאתים (תהיה) מעלה אחת ושלשה וארבעים חלקים.

הלכה יח
הרי שהיה המסלול שלש מאות תגרע אותו משלש מאות וששים נשאר ששים, וכבר ידעת שמנת ששים ארבע מעלות ועשרים חלקים, וכך היא מנת שלש מאות ארבע מעלות ועשרים חלקים, ועל דרך זו בכל המניינות.

הלכה יט
הרי שרצינו לידע רוחב הירח כמה הוא ובאיזה רוח הוא אם צפוני או דרומי בתחלת ליל ערב שבת שני לחדש אייר משנה זו, וכבר ידעת שמקום הירח האמתי היה בליל זה בשמונה עשרה מעלות וששה ושלשים חלקים ממזל שור, סימנו י"ח ל"ו, ומקום הראש היה באותה העת בשבע ועשרים מעלות ושלשים חלקים ממזל בתולה, סימנו כז"ל, תגרע מקום הראש ממקום הירח, יצא לך מסלול הרוחב מאתים אחת ושלשים מעלות וששה חלקים, סימנו רל"א ו', לפי שאין משגיחין על החלקים בכל (המסלול) [מסלול], ונמצאת המנה של מסלול זה בדרכים שביארנו בפרק זה שלש מעלות ושלשה וחמשים חלקים, וזה הוא רוחב הירח בתחלת ליל זה, והוא דרומי שהרי המסלול יתר על מאה ושמונים.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 0 | 0-52 | 1-43 | 2-30 | 3-13 | 3-50 | 4-20 | 4-42 | 4-55 | 5-00 |

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק יז

הלכה א
כל הדברים שהקדמנו כדי שיהיו עתידים ומוכנים לידיעת הראייה, וכשתרצה לדעת זאת תתחיל ותחשוב ותוציא מקום השמש האמתי ומקום הירח האמתי ומקום הראש לשעת הראייה, ותגרע מקום השמש האמתי ממקום הירח האמתי והנשאר הוא הנקרא אורך ראשון.

הלכה ב
ומאחר שתדע מקום הראש ומקום הירח תדע רוחב הירח כמה הוא, ואם הוא רוחב צפוני או דרומי והוא הנקרא רוחב ראשון, והזהר באורך הזה הראשון וברוחב הראשון ויהיו שניהם מוכנים לפניך.

הלכה ג
והתבונן באורך זה הראשון (וברוחב הזה הראשון), אם יצא לך תשע מעלות בשוה או פחות, תדע בודאי שאי אפשר לעולם שיראה הירח באותו הלילה בכל ארץ ישראל ואין אתה צריך חשבון אחר, ואם יהיה האורך הראשון יתר על חמש עשרה מעלות תדע בודאי שהירח יראה בכל ארץ ישראל ואין אתה צריך לחשבון אחר, ואם יהיה האורך הראשון מתשע מעלות ועד חמש עשרה תצטרך לדרוש ולחקור בחשבונות הראייה, עד שתדע אם יראה או לא יראה.

הלכה ד
במה דברים אמורים בשהיה מקום הירח האמתי מתחלת מזל גדי עד סוף מזל תאומים, אבל אם היה מקום הירח מתחלת מזל סרטן עד סוף מזל קשת ויהיה האורך הראשון עשר מעלות בשווה או פחות, תדע שאין הירח נראה כלל באותו הלילה בכל ארץ ישראל, ואם היה האורך הראשון יתר על ארבע ועשרים מעלות ודאי יראה בכל גבול ישראל, ואם יהיה האורך הראשון מעשר מעלות עד ארבע ועשרים תצטרך לדרוש ולחקור בחשבונות הראייה עד שתדע אם יראה או לא יראה.

מתי צריכין לחקור? אם הירח מ 90-270 אז יש לחקור מ 10-15
אם הירח מ270-90 אז יש לחקור מ 11-24

הלכה ה
ואלו הן חשבונות הראייה: התבונן וראה הירח באיזה מזל הוא, אם יהיה במזל טלה תגרע מן האורך הראשון תשעה וחמשים חלקים, ואם יהיה במזל שור תגרע מן האורך מעלה אחת, ואם יהיה במזל תאומים תגרע מן האורך שמונה וחמשים חלקים, ואם יהיה במזל סרטן תגרע מן האורך שנים וחמשים חלקים, ואם יהיה במזל אריה תגרע מן האורך שלשה וארבעים חלקים, ואם יהיה במזל בתולה תגרע מן האורך שבעה ושלשים חלקים, ואם יהיה במזל מאזנים תגרע מן האורך ארבעה ושלשים חלקים, ואם יהיה במזל עקרב תגרע מן האורך ארבעה ושלשים חלקים, ואם יהיה במזל קשת תגרע מן האורך ששה ושלשים חלקים, ואם יהיה במזל גדי תגרע מן האורך ארבעה וארבעים חלקים, ואם יהיה במזל דלי תגרע מן האורך שלשה וחמשים חלקים, ואם יהיה במזל דגים תגרע מן האורך שמונה וחמשים חלקים, והנשאר מן האורך אחר שתגרע ממנו אלו החלקים הוא הנקרא אורך שני.

הלכה ו
ולמה גורעין חלקים אלו, לפי שמקום הירח האמתי אינו המקום שיראה בו אלא שינוי יש ביניהם באורך וברוחב, והוא הנקרא שינוי המראה, ושינוי מראה האורך בשעת הראייה לעולם גורעין אותו מן האורך כמו שבארנו.

הלכה ז
אבל שינוי מראה הרוחב, אם היה רוחב הירח צפוני גורעין חלקים של שינוי מראה הרוחב מן הרוחב הראשון, ואם היה רוחב הירח דרומי מוסיפין החלקים של שינוי מראה הרוחב על הרוחב הראשון, ומה שיהיה הרוחב הראשון אחר שמוסיפין עליו או גורעין ממנו אותם החלקים הוא הנקרא רוחב שני.

הלכה ח
וכמה הם החלקים שמוסיפין או גורעין אותן, אם יהיה הירח במזל טלה תשעה חלקים, ואם יהיה במזל שור עשרה חלקים, ואם יהיה במזל תאומים ששה עשר חלקים, ואם יהיה במזל סרטן שבעה ועשרים חלקים, ואם יהיה במזל אריה שמונה ושלשים חלקים, ואם יהיה במזל בתולה ארבעה וארבעים חלקים, ואם יהיה במזל מאזנים ששה וארבעים חלקים, ואם יהיה במזל עקרב חמשה וארבעים חלקים, ואם יהיה במזל קשת ארבעה וארבעים חלקים, ואם יהיה במזל גדי ששה ושלשים חלקים, ואם יהיה במזל דלי שבעה ועשרים חלקים, ואם יהיה במזל דגים שנים עשר חלקים.

הלכה ט
ומאחר שתדע חלקים אלו תגרע אותן מן הרוחב הראשון או תוסיף אותן עליו כמו שהודענוך ויצא לך הרוחב השני, וכבר ידעת אם הוא צפוני או דרומי, ותדע כמה מעלות וכמה חלקים נעשה זה הרוחב השני ותכין אותו לפניך ויהיה עתיד.

| טלה | שור | תאו | סרטן | ארי | בתול | מזנם | עקר | קשת | גדי | דלי | דגם |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 59 | 60 | 58 | 52 | 43 | 37 | 34 | 34 | 36 | 44 | 53 | 58 |
| 9 | 10 | 16 | 27 | 38 | 44 | 46 | 45 | 44 | 36 | 24 | 12 |

הלכה י
ואחר כך תחזור ותקח מן הרוחב השני הזה מקצתו, מפני שהירח נלוז מעט במעגלו, וכמה הוא המקצת שתקח ממנו, אם יהיה מקום הירח מתחלת מזל טלה עד עשרים מעלה ממנו, או מתחלת מזל מאזנים עד עשרים מעלה ממנו, תקח מן הרוחב השני שני חמשיו, ואם יהיה הירח מעשרים ממזל טלה עד עשר מעלות ממזל שור או מעשרים ממזל מאזנים עד עשר מעלות ממזל עקרב תקח מן הרוחב השני שלישיתו, ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל שור עד עשרים ממנו או מעשר מעלות ממזל עקרב עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביעיתו, ואם יהיה הירח מעשרים מעלות ממזל שור עד סופו או מעשרים ממזל עקרב עד סופו תקח מן הרוחב השני חמישיתו, ואם יהיה הירח מתחלת מזל תאומים עד עשר מעלות ממנו או מתחלת מזל קשת עד עשר מעלות ממנו תקח מן הרוחב השני שתותו, ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל תאומים ועד עשרים ממנו או מעשר ממזל קשת עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני חצי שתותו, ואם יהיה מקום הירח מעשרים ממזל תאומים עד חמש ועשרים ממנו או מעשרים ממזל קשת עד חמש ועשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביע שתותו, ואם יהיה מקום הירח מחמש ועשרים ממזל תאומים עד חמש מעלות ממזל סרטן או מחמש ועשרים ממזל קשת עד חמש מעלות ממזל גדי לא תקח כלום, לפי שאין כאן נליזת מעגל, ואם יהיה הירח מחמש ממזל סרטן עד עשר ממנו או מחמש ממזל גדי עד עשר ממנו תקח מן הרוחב השני רביע שתותו. ואם יהיה מקום הירח מעשר ממזל סרטן עד עשרים ממנו או מעשר ממזל גדי עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני חצי שתותו, ואם יהיה מקום הירח מעשרים ממזל סרטן עד סופו או מעשרים ממזל גדי עד סופו תקח מן הרוחב השני שתותו, ואם יהיה הירח מתחלת מזל אריה עד עשר מעלות ממנו או מתחלת מזל דלי עד עשר מעלות ממנו תקח מן הרוחב השני חמישיתו, ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל אריה עד עשרים ממנו או מעשר

ממזל דלי עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביעיתו, ואם יהיה הירח מעשרים ממזל אריה עד עשר ממזל בתולה או מעשרים ממזל דלי עד עשר ממזל דגים תקח מן הרוחב השני שלישיתו, ואם יהיה הירח מעשר ממזל בתולה עד סופו או מעשר ממזל דגים עד סופו תקח מן הרוחב השני שני חמשיו, וזאת המקצת שתקח מן הרוחב השני היא הנקראת מעגל הירח.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0-20<br>180-200 | 20-40<br>200-220 | 40-50<br>220-230 | 50-60<br>230-240 | 60-70<br>240-250 | 70-80<br>250-260 | 80-85<br>260-265 |
| 160-180<br>340-360 | 140-160<br>320-340 | 130-140<br>310-320 | 120-130<br>300-310 | 110-120<br>290-300 | 100-110<br>280290 | 95-100<br>275-280 |
| 2/5 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/12 | 1/24 |

הלכה יא
ואחר כך תחזור ותתבונן ברוחב הירח ותראה אם הוא צפוני או דרומי, אם היה צפוני תגרע מעגל הירח הזה מן האורך השני, ואם היה רוחב הירח דרומי תוסיף המעגל הזה על האורך השני, במה דברים אמורים בשהיה מקום הירח מתחלת מזל גדי עד סוף מזל תאומים, אבל אם היה הירח מתחלת מזל סרטן עד סוף מזל קשת יהיה הדרך הפך, שאם יהיה רוחב הירח צפוני תוסיף המעגל על האורך השני, ואם היה רוחב הירח דרומי תגרע המעגל מן האורך השני, ומה שיהיה האורך השני אחר שתוסיף עליו או תגרע ממנו הוא הנקרא אורך שלישי, ודע שאם לא יהיה שם נליזת מעגל ולא נתן החשבון לקחת מן הרוחב השני כלום, יהיה האורך השני עצמו הוא האורך השלישי בלא פחות ובלא יתר.

הלכה יב
ואחר כך תחזור ותראה האורך השלישי הזה והוא המעלות שבין הירח והשמש באיזה מזל הוא, אם יהיה במזל דגים או במזל טלה, תוסיף על האורך השלישי שתותו, ואם יהיה האורך במזל דלי או במזל שור, תוסיף על האורך השלישי חמישיתו, ואם יהיה האורך במזל גדי או במזל תאומים, תוסיף על האורך השלישי שתותו, ואם יהיה האורך במזל קשת או במזל סרטן, תניח האורך השלישי כמות שהוא ולא תוסיף עליו ולא תגרע ממנו, ואם היה האורך במזל עקרב או במזל אריה, תגרע מן האורך השלישי חמישיתו, ואם יהיה האורך במזל מאזנים או במזל בתולה, תגרע מן האורך השלישי שלישיתו, ומה שיהיה האורך השלישי אחר שתוסיף עליו או תגרע ממנו או תניח אותו כמות שהוא, הוא הנקרא אורך רביעי,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| דגים-טלה | דלי-שור | גדי-תאומים | קשת-סרטן | עקרב-ארי | מאז-בתולה |
| 7/6 | 6/5 | 7/6 | 1 | 4/5 | 2/3 |

ואחר כך תחזור אצל רוחב הירח הראשון ותקח ממנו שני שלישיו לעולם, וזה הוא הנקרא מנת גובה המדינה, ותתבונן ותראה אם יהיה רוחב הירח צפוני, תוסיף מנת גובה המדינה על האורך הרביעי, ואם יהיה רוחב הירח דרומי, תגרע מנת גובה המדינה מן האורך הרביעי, ומה שיהיה האורך הרביעי אחר שגורעין ממנו או מוסיפין עליו הוא הנקרא קשת הראייה.

הלכה יג
כיצד הרי שבאנו לחקור אם יראה הירח בליל ערב שבת שני לחדש אייר משנה זו או לא יראה, תוציא מקום השמש האמתי ומקום הירח האמתי ורוחב הירח לשעה זו כמו שהודענוך, יצא לך מקום השמש האמתי בשבע מעלות ותשעה חלקים ממזל שור, סימנו ז"ט, ויצא לך מקום הירח האמתי בשמונה עשרה מעלות וששה ושלשים חלקים ממזל שור, סימנו י"ח ל"ו, ויצא לך רוחב הירח ברוח דרום שלש מעלות ושלשה וחמשים חלקים, סימנו גנ"ג, וזה הוא הרוחב הראשון, ותגרע מקום השמש ממקום הירח ישאר אחת עשרה מעלות ושבעה ועשרים חלקים, סימנו י"א כ"ז, וזה הוא האורך הראשון, ולפי שהיה הירח במזל שור יהיה שינוי מראה האורך מעלה אחת וראוי לגרוע אותה מן האורך הראשון, יצא לך האורך השני עשר מעלות ושבעה ועשרים חלקים, סימנו יכ"ז, וכן יהיה שינוי מראה הרוחב עשרה חלקים, ולפי שרוחב הירח היה דרומי ראוי להוסיף עליו שינוי המראה שהוא עשרה חלקים, יצא לך הרוחב השני ארבע מעלות ושלשה חלקים, סימנו ד"ג, ולפי שהיה הירח בשמונה עשרה מעלות ממזל שור ראוי ליקח מן הרוחב השני רביעיתו והוא הנקרא מעגל הירח, יצא לך מעגל הירח לעת זו מעלה אחת וחלק אחד לפי שאין מדקדקין בשניות.

הלכה יד
ולפי שרוחב הירח דרומי ומקום הירח האמתי בין ראש גדי וראש סרטן, ראוי להוסיף המעגל על האורך השני, יצא לך האורך השלישי אחת עשרה מעלות ושמונה ועשרים חלקים, סימנו י"א כ"ח, ולפי שהאורך הזה במזל שור ראוי להוסיף על האורך השלישי חמישיתו שהוא שתי מעלות ושמונה עשרה חלקים, ויצא לך האורך הרביעי שלש עשרה מעלות וששה וארבעים חלקים, סימנו י"ג מ"ו, וחזרנו אצל הרוחב הראשון ולקחנו שני שלישיו יצא מנת גובה המדינה והוא שתי מעלות וחמשה ושלשים חלקים, ולפי שהיה הרוחב דרומי ראוי לגרוע מנת גובה המדינה מן האורך הרביעי, ישאר לך אחת עשרה מעלות ואחד עשר חלקים, סימנו י"א י"א, וזו היא קשת הראייה בלילה הזה, ועל דרך זו

תעשה ותדע קשת הראייה כמה מעלות וכמה חלקים יש בה בכל ליל ראייה שתרצה לעולם.

הלכה טו

ואחר שתצא קשת זו תבין בה, ודע שאם תהיה קשת הראייה תשע מעלות או פחות אי אפשר שיראה בכל ארץ ישראל, ואם תהיה קשת הראייה יתר על ארבע עשרה מעלות אי אפשר שלא יראה ויהיה גלוי לכל ארץ ישראל.

הלכה טז

ואם תהיה קשת הראייה מתחלת מעלה עשירית עד סוף מעלת ארבע עשרה, תערוך קשת הראייה אל האורך הראשון ותדע אם יראה הירח או לא יראה מן הקצין שיש לו, והן הנקראין קיצי הראייה.

הלכה יז

ואלו הן קיצי הראייה, אם תהיה קשת הראייה מותר על תשע מעלות עד סוף עשר מעלות או יתר על עשר, ויהיה האורך הראשון שלש עשרה מעלות או יתר, ודאי יראה, ואם תהיה הקשת פחות מזה או יהיה האורך פחות מזה לא יראה.

הלכה יח

ואם תהיה קשת הראייה מותר על עשר מעלות עד סוף אחת עשרה מעלות או יתר על אחת עשרה, ויהיה האורך הראשון שתים עשרה מעלות או יתר, ודאי יראה, ואם תהיה הקשת פחות מזה או יהיה האורך פחות מזה לא יראה.

הלכה יט

ואם תהיה קשת הראייה מותר על אחת עשרה מעלות עד סוף שתים עשרה מעלות או יתר על י"ב, והיה האורך הראשון אחת עשרה מעלות או יתר ודאי יראה, ואם תהיה הקשת פחות מזה או יהיה האורך פחות מזה לא יראה.

הלכה כ

ואם תהיה קשת הראייה מותר על שתים עשרה מעלות עד סוף שלש עשרה מעלות או יתר על שלש עשרה, ויהיה האורך הראשון עשר מעלות או יתר ודאי יראה, ואם תהיה הקשת פחות מזה או יהיה האורך פחות מזה לא יראה.

הלכה כא

ואם תהיה קשת הראייה מותר על י"ג מעלות עד סוף ארבע עשרה מעלות או יתר על ארבע עשרה, ויהיה האורך הראשון תשע מעלות או יתר ודאי יראה, ואם תהיה הקשת פחות מזה או יהיה האורך פחות מזה לא יראה, ועד כאן סוף הקצין.

הלכה כב
כיצד באנו להתבונן בקשת הראייה של ליל ערב שבת שני לחדש אייר משנה זו, יצא לנו בחשבון קשת הראייה אחת עשרה מעלות ואחד עשר חלקים כמו שידעת, ולפי שהיתה קשת הראייה בין עשר עד ארבע עשרה ערכנו אותה אל האורך הראשון, וכבר ידעת שהאורך היה בליל זה אחת עשרה מעלות ושבעה ועשרים חלקים, ולפי שהיתה קשת הראייה יתר על אחת עשרה מעלות והיה האורך הראשון יתר על [אחת] עשרה, יודע שודאי יראה בליל זה לפי הקצין הקצובות, וכן תעשה בכל קשת וקשת עם האורך הראשון שלה.

הלכה כג
וכבר ראית מן המעשים האלו כמה חשבונות יש בו וכמה תוספות וכמה גירועין אחר שיגענו הרבה עד שהמצינו דרכים קרובים שאין בחשבונם עומק גדול, שהירח עקלקלות גדולות יש במעגלותיו, ולפיכך אמרו חכמים שמש ידע מבואו ירח לא ידע מבואו, ואמרו חכמים פעמים בא בארוכה פעמים בא בקצרה, כמו שתראה מחשבונות אלו שפעמים תוסיף ופעמים תגרע עד שתצא קשת הראייה, ופעמים תהיה קשת הראייה ארוכה ופעמים קצרה כמו שביארנו.

הלכה כד
וטעם כל אלו החשבונות ומפני מה מוסיפים מנין זה ומפני מה גורעין, והיאך נודע כל דבר ודבר מאלו הדברים, והראיה על כל דבר ודבר, היא חכמת התקופות והגימטריות שחברו בה חכמי יון ספרים הרבה והם הנמצאים עכשיו ביד החכמים, אבל הספרים שחברו חכמי ישראל שהיו בימי הנביאים מבני יששכר לא הגיעו אלינו, ומאחר שכל אלו הדברים בראיות ברורות הם שאין בהם דופי ואי אפשר לאדם להרהר אחריהם, אין חוששין למחבר בין שחברו אותו נביאים בין שחברו אותם גוים, שכל דבר שנתגלה טעמו ונודעה אמתתו בראיות שאין בהם דופי אין סומכין על זה האיש שאמרו או שלמדו אלא על הראייה שנתגלתה והטעם שנודע.

This sefer is for people that know basic algebra geometry and trig. Anyone who wishes to learn these subjects can find many useful books. If you went to a yeshiva that has HS, and you passed the “regents”, you are probably capable of reading this book. I am starting from Rambam Perek 12 and 13. You should first read the Rambam with a basic commentary [example R’ chaim Kanievsky Shlita] then you can read this book to get a better understanding.

See figure 1. The sun S travels around C [the “center” of the sun's orbit] in this diagram, the sun is 2 inches! From its center. The earth E, is 1 inch from C. Remember the sun is ALWAYS 2 inches from its center, however its distance from E varies throughout the year. When S is at K it is the FARTHEST from E [3 inches!] when it reaches S, it is less [please measure..] when it reaches G, it is the CLOSEST to E [just 1 inch!]

Figure 2 and 3 show S at various positions throughout the year. Now K is the נקודת הגובה and in Rambam's time it was at 26^ but the RBM explains that this point [the point that when the sun reaches there, it is the FARTHEST from Earth] keeps on changing, b/c C also moves in space around E,

For now let's focus on ANGLE [@=ANGLE] kcs. This @ is called מסלול השמש . in figure 1 it is 58^ in figure 2 its 125^ in figure 3 226^ [please measure it with a protractor that you get in a 99 cents store]

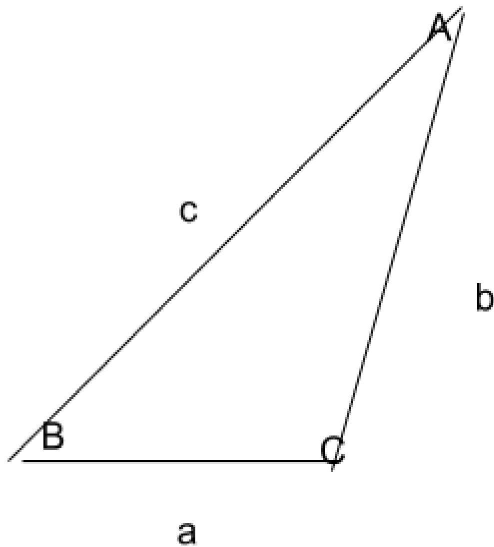
We want to know the מנת המסלול that is @esc . this is the DIFFERENCE between @kcs and @kes. From geometry we know that @ces + @esc = the “outer” angle @kcs. So we see that viewing the sun from EARTH E, will cause us to get a SMALLER angle [measured of course from K that is our “starting point”]

The RBM explains that if מסלול השמש is less than 180^ the we SUBTRACT, as you see that in both figure 1 and 2, @kes is LESS than @kcs

However in figure 3 the opposite is true [the “true sun” [as seen from E] is MORE than the “mean sun” [as seen from C]]

Now we need to use the law of sines and of cosines [see back of book for proofs] to find @ esc

The law of cosines is:  c squared =a squared+b squared -2ab cosC




Line ec is a.  Line cs is b. Line es is c. also we need to find @esc that is A

Remember that a is one. And b is two. So a sq +b sq =5

c squared = 5- 2*1*2*cos C

Now we know cos C =cos 122. Finally solve for c=2.69

Now we use the law of sines

a/sin A = c/sin C

1/sin A = 2.69/.848

A=18.3768^   you can check it!  [the angle esc is about 18^]

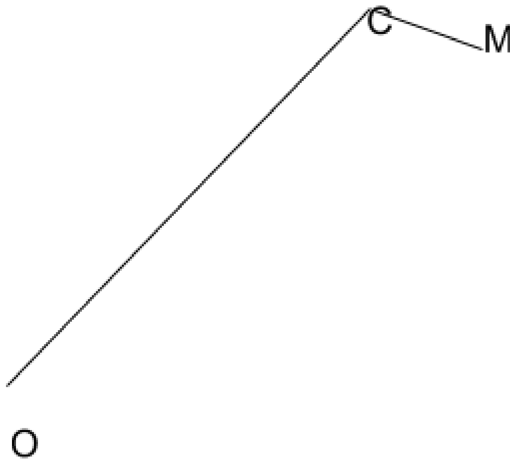
Now we understand the “math” behind the מנת המסלול [the main difference is that ec=.03461 and ck=cs=1] I purposely used 1 and 2 to exaggerate the מנת המסלול

To sum up: to find the מקום השמש האמיתי we first find k [מקום הגובה] then we figure out @kcs [מסלול השמש] then we use the law of cosines to find es then we use the law of sines to find @esc

Chapter 14 and 15 please read it with a basic commentary. The moon has many components. See figure 4
E is earth. O is the center of the “mean moon” that we call C. As you see, oc and ok are the same length. [2 inches] In the beginning of the month [at the “mean molad”] we have a straight line eocs [s is the sun that is far away-also note that at this point c and k are in the same “place”] as time passes, c orbits o, but o itself also orbits e !! [sounds weird--use you imagination and think hard..] the COMBINATION of these two “orbits" creates figure 4. We have at any given time in the month, @kec or oec [they are the same...] that is: viewing from earth towards o, then turn your body some degrees to see c . Now comes wonders: this angle [kec] is EXACTLY double the amount of the distance the sun s, is from c. The whole system is so calculated that the sun is “in between " [example: in figure 4 @kec=40^. So the sun is EXACTLY 20^ [imagine @kes [not shown on the paper] is 20^]

So here come the famous מרחק הכפול .we must know @kec in order to add some degrees to אמצע המסלול [don’t worry will be explained soon...] before we go into details lets outline the process how we find ירח האמיתי M

We have an epicycle. The moon m orbits around c, [in a clockwise motion] [by the way: c orbits o in a counterclockwise motion, and o orbits e in a clockwise motion] the RBM calls this epicycle .אמצע המסלול




Point c orbits point o and is always the same distance [c from o] but the "real moon ' is M that orbits around C. So we need to know where is m in its orbit around c, and then draw a line from E to M to find its real angle.

But to complicate things even more, we have a tiny movement "to and fro" of the layer beneath cm [imagine cm is on a disc, and the disc itself moves like a fan a little to right then back and the a little to the left]
See figure 5 . c is the center of a "disc" that moves a drop [@pce] [in this figure clockwise] forget about m for a moment [he moves "on the disc" itself] now we are talking about the disc that has c in its center, we say that there is a point in space called p [pe is the same length as eo] we draw a line from p all the way to c, and pass it further into space till the edge of the imaginary disc [z], now we can also draw an imaginary line in space from E till c and reach the end of the disc. [y] point y will "move" to point z [or better, the disc will move this angle that is from y to z] now don't ask me why and how, this is the fact that the RMB tells us

You understand that @pce [that is this small movement "yz"] is dependent on @ kec. So if we know the מרחק הכפול we can find the הוספת על אמצע המסלול פרק טו הלכה ג

Let's work it out! See figure 5. We know @kec [מרחק הכפול] in this figure it is 30^ [plz measure!] also we have pe=1 eo=1 oc=2 [all these are “given”] we must find @pce or arc yz

Solve for @pec thru law of cosines
we need to find @pec [that is the תוספת המסלול] we know oc=2, eo=1, pe=1, @cek=30^ "merchak hakuful"

find @eco thru law of sines: sin@eco/1 =sin 30^/2 solve for @eco=14.478^
so we have left for @eoc 135.52^ now we must find ec thru law of sines
ec/ sin 135.52^= 2/sin 30^ solve for ec=2.8026 now we will solve for pc thru law of cosines
pc sqr= pe sqr + ec sqr - 2* pe * ec * cos (150) [see figure]
pc=3.7026
now to solve for @ pce we use law of sines: 1/sin @pce = 3.7027/ sin(150)
7.761^

its a quite long way....but this is it! finally we have the Tosefes Hamaslul 7.761^ we must ADD to Emtsa Hamaslul
we will do some REAL examples later...

now we find Menus Hamaslul. see figure 6 that is @ cem. Remember the REAL moon is at point M. this is its REAL position AFTER adjusting the "additional Tosefes Hamaslul" so our "final" Maslul Hanuchon is the moon on its epicycle at @acm and this is "given" b/c we figured it out with our given information 1) we added for each day 13 maalos 3 chalkim 53.93 shniyos [see rambam] 2) we corrected it with 7.761^
thru our knowledge of merchak hakuful

so our givens are: cm=1 ce=3 [in this figure] @acm=45^
use law of cosines to find em. em sqr= ec sqr+ cm sqr - 2*cm*ec*cos(135)

solve for em=3.774 [you can also measure it!]
now use law of sines: em/ sin (135) = 1/ sin @cem we get 10.8^
this is called Menus Hamaslul. and we need to add or subtract this from Emtsa Hayaraach

finally lets do a REAL example [ real numbers for EVERYTHING!]
we shall try to find the makom yerach haamiti for friday night Rosh Hodesh Elul [at nightfall] this year 5780
also Liel shabbos kodesh Parshas Shoftim. The secular date is Aug 21 2020

See in “new epoch” all the values calculated for this time

Now we shall get all values for this friday
2332*MEAN SUN + yom haikkar mean sun = 150.0108427
2332*MAKOM GOVAH + “””” makom govah= 351.141665
2332*EMTSA YAREACH+ yom haikkar emtsa yareach= 171.965807
2332*EMTSA MASLUL + “” “”” emtsa maslul= 144.6316028
2332*MAKOM HAROSH + “”” makom harosh= 86.5845078

First we will calculate the TRUE SUN.
We find that the maslul hashemesh [chapter 13] is
150.0108427-351.141665=158.8691777 [remeber any negative number, just add 360!]

ce=.03461 [this is given by the kadmonim] cs=1. Now thru the law of cosines: se sqr = 1 sqr +.03461 sqr - 2*.03461* cos(180-maslul hashemesh)

The law of sines tells us: sin (menas maslul)/.03461= sin (maslul) /se

But se = sqrt [1.001197852+.06922*cos (maslul) ]
{remember cos (180-x) = -cos (x)    also sin(x)= sin (180-x) }

Finally sin (menas maslul)=  .03461 * sin (maslul) / se
If we put in  158.869177 as (maslul) we get =.012892012
Then find arcsin (.012892012)= .73867833
That is 44.32 chalakim [see RMB that gives for 160 42 chalkim]
Also note that if the maslul is above 180, then deduct it from 360, and ADD it to emtsa hashemesh [instead of SUBTRACTING] see RMB
Bottom line: shemesh amiti= 150.0108427-.73867833=149.2721644

Now we move on to real moon. This is done in a few steps

1) Find merchak hakuful. Quite simple: subtract emtsa  yareach from emtsa shemesh, and double it. You shall get 43.9099286
2) Now we give some values: eo and pe = .20764844 co and ok =1 cm=.105333781
3) Tosefes hamaslul is angle pce. This is a function  of merchak kuful that is angle ceo [or cek] let us see how: first write pc sqr = pe sqr + ec sqr -2 pe ec cos (180-merchak kuful)
4) Then write ec sqr = eo sqr + oc sqr - 2 eo oc cos (coe)
5) Now, angle coe= 180-merchak-eco
6) Now,  sin (eco) / eo = sin (merchak) / oc
7) So we will work out angle eco = 8.279939241 [say 8.28]
8) Angle coe=127.8100714 [say 127.81]
9) Work out ec= 1.139172301 [say 1.14]
10) Work out pc= 1.28137
11) Finally use sine law: sin (180-43.91)/ pc = sin(pce) /.20764844
12) Work out for angle pce= 6.45296 [say 6.453] note RMB gives for this range, 6 degrees

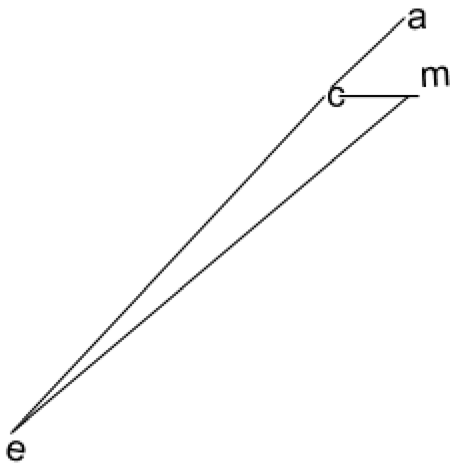
This is a lengthy process! But with a scientific calculator [TI- 30 XS] this shall take no more than five minutes!

Note when merchak kuful is 180, there is no tosefes maslul, that is on the first quarter of the month we have a straight line oepc [or at the first quarter of the month c is very close to e]

until half of the month, it is negative, so 200 and 160 merchak kuful are the same, 340 and 20 are the same [ 3 degrees according to RMB] just 340 is NEGATIVE.
From the first half of the month until the end of the month , the whole process REPEATS itself

The last step is menus hamaslul. After we know maslul amiti, thru adding tosefes maslul to emtsa maslul, we must find menus hamaslul

See diagram we need to find cem assuming we know acm [maslul amiti]
Note that angle ecm is 180-acm. Also we know ec and cm. We shall use the law of cosines to find em. Then the law of sines to find angle cem [similar to what we did to find shemesh amiti]




So here are the givens: ecm= 180- [144.6316+6.45296] or 180-[maslul amiti] =28.91544 [note diagram is NOT accurate!]

ec=1.14 [see above] cm=.105333781 [see above]
Solve for em=1.049034812 [say 1.05]
Use law of sines to get angle cem=2.7828133
Finally DEDUCT this from emtsa yereach 171.965807-2.7828133=169.183
Note that if maslul amiti [x] is GREATER than 180, then do 360-x , and do everything the same just ADD to emtsa instead of subtracting [see diagram]
RMB gives 2 degrees and 48 chalakim [see RMB 15:6 for value of 150 of maslul amiti--we have 151.2]   so our value [2.7828133] is very close BH

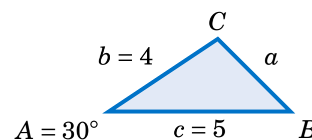
With this we conclude BSD perk 12-15

## 2.2 The Law of Cosines

We will now discuss how to solve a triangle in Case 3: two sides and the angle between them. First, let us see what happens when we try to use the Law of Sines for this case.

***Example 2.4***

*Case 3: Two sides and the angle between them.*
Solve the triangle $\triangle ABC$ given $A = 30°$, $b = 4$, and $c = 5$.




**Solution:** Using the Law of Sines, we have

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{4}{\sin B} = \frac{5}{\sin C} ,$$

where each of the equations has two unknown parts, making the problem impossible to solve. For example, to solve for $a$ we could use the equation $\frac{4}{\sin B} = \frac{5}{\sin C}$ to solve for $\sin B$ in terms of $\sin C$ and substitute that into the equation $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{4}{\sin B}$. But that would just result in the equation $\frac{a}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin C}$, which we already knew and which still has two unknowns!
Thus, this problem can not be solved using the Law of Sines.

To solve the triangle in the above example, we can use the *Law of Cosines*:

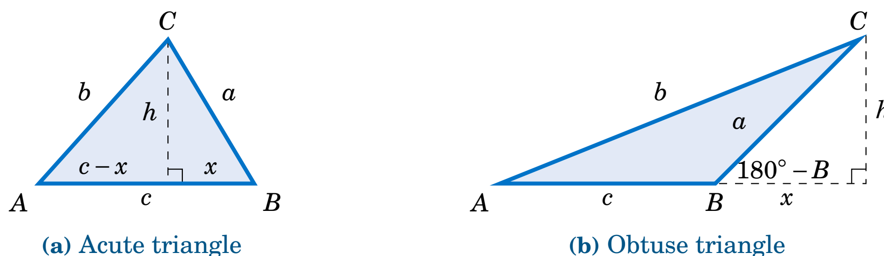
**Theorem 2.2. Law of Cosines:** If a triangle has sides of lengths $a$, $b$, and $c$ opposite the angles $A$, $B$, and $C$, respectively, then

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A , \tag{2.9}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B , \tag{2.10}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C . \tag{2.11}$$

To prove the Law of Cosines, let $\triangle ABC$ be an oblique triangle. Then $\triangle ABC$ can be acute, as in Figure 2.2.1(a), or it can be obtuse, as in Figure 2.2.1(b). In each case, draw the altitude from the vertex at $C$ to the side $\overline{AB}$. In Figure 2.2.1(a) the altitude divides $\overline{AB}$ into two line segments with lengths $x$ and $c - x$, while in Figure 2.2.1(b) the altitude extends the side $\overline{AB}$ by a distance $x$. Let $h$ be the height of the altitude.




**(a)** Acute triangle **(b)** Obtuse triangle

**Figure 2.2.1** Proof of the Law of Cosines for an oblique triangle $\triangle ABC$

For each triangle in Figure 2.2.1, we see by the Pythagorean Theorem that

$$h^2 = a^2 - x^2 \tag{2.12}$$

and likewise for the acute triangle in Figure 2.2.1(a) we see that

$$b^2 = h^2 + (c-x)^2 \,. \tag{2.13}$$

Thus, substituting the expression for $h^2$ in equation (2.12) into equation (2.13) gives

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - x^2 + (c-x)^2 \\ &= a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2cx \,. \end{aligned}$$

But we see from Figure 2.2.1(a) that $x = a \cos B$, so

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos B \,. \tag{2.14}$$

And for the obtuse triangle in Figure 2.2.1(b) we see that

$$b^2 = h^2 + (c+x)^2 \,. \tag{2.15}$$

Thus, substituting the expression for $h^2$ in equation (2.12) into equation (2.15) gives

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - x^2 + (c+x)^2 \\ &= a^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \\ &= a^2 + c^2 + 2cx \,. \end{aligned}$$

But we see from Figure 2.2.1(a) that $x = a \cos(180° - B)$, and we know from Section 1.5 that $\cos(180° - B) = -\cos B$. Thus, $x = -a \cos B$ and so

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos B \,. \tag{2.16}$$

So for both acute and obtuse triangles we have proved formula (2.10) in the Law of Cosines. Notice that the proof was for $B$ acute and obtuse. By similar arguments for $A$ and $C$ we get the other two formulas. **QED**

Note that we did not prove the Law of Cosines for right triangles, since it turns out (see Exercise 15) that all three formulas reduce to the Pythagorean Theorem for that case. The Law of Cosines can be viewed as a generalization of the Pythagorean Theorem.

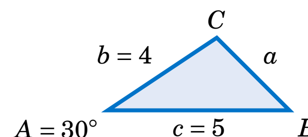
Also, notice that it suffices to remember just one of the three formulas (2.9)-(2.11), since the other two can be obtained by "cycling" through the letters $a$, $b$, and $c$. That is, replace $a$ by $b$, replace $b$ by $c$, and replace $c$ by $a$ (likewise for the capital letters). One cycle will give you the second formula, and another cycle will give you the third.

The angle between two sides of a triangle is often called the **included angle**. Notice in the Law of Cosines that if two sides and their included angle are known (e.g. $b$, $c$, and $A$), then we have a formula for the square of the third side.

We will now solve the triangle from Example 2.4.

***Example 2.5***

*Case 3: Two sides and the angle between them.*
Solve the triangle $\triangle ABC$ given $A = 30°$, $b = 4$, and $c = 5$.




**Solution:** We will use the Law of Cosines to find $a$, use it again to find $B$, then use $C = 180° - A - B$. First, we have

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos 30° = 6.36 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 2.52}\,. \end{aligned}$$

Now we use the formula for $b^2$ to find $B$:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\Rightarrow \quad \cos B = \frac{5^2 + (2.52)^2 - 4^2}{2(5)(2.52)} = 0.6091$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = 52.5°}$$

Thus, $C = 180° - A - B = 180° - 30° - 52.5° \Rightarrow \boxed{C = 97.5°}$.

Notice in Example 2.5 that there was only one solution. For Case 3 this will *always* be true: when given two sides and their included angle, the triangle will have exactly one solution. The reason is simple: when joining two line segments at a common vertex to form an angle, there is exactly one way to connect their free endpoints with a third line segment, regardless of the size of the angle.

You may be wondering why we used the Law of Cosines a second time in Example 2.5, to find the angle $B$. Why not use the Law of Sines, which has a simpler formula? The reason is that using the cosine function eliminates any ambiguity: if the cosine is positive then the angle is acute, and if the cosine is negative then the angle is obtuse. This is in contrast to using the sine function; as we saw in Section 2.1, both an acute angle and its obtuse supplement have the same positive sine.

To see this, suppose that we had used the Law of Sines to find $B$ in Example 2.5:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4 \sin 30°}{2.52} = 0.7937 \quad \Rightarrow \quad B = 52.5° \text{ or } 127.5°$$

How would we know which answer is correct? We could not immediately rule out $B = 127.5°$ as too large, since it would make $A + B = 157.5° < 180°$ and so $C = 22.5°$, which seems like it could be a valid solution. However, this solution is impossible. Why? Because the largest side in the triangle is $c = 5$, which (as we learned in Section 2.1) means that $C$ has to be the largest angle. But $C = 22.5°$ would not be the largest angle in this solution, and hence we have a contradiction.

# 2 General Triangles

In Section 1.3 we saw how to solve a right triangle: given two sides, or one side and one acute angle, we could find the remaining sides and angles. In each case we were actually given three pieces of information, since we already knew one angle was 90°.

For a general triangle, which may or may not have a right angle, we will again need three pieces of information. The four cases are:

| | |
|---|---|
| Case 1: | One side and two angles |
| Case 2: | Two sides and one opposite angle |
| Case 3: | Two sides and the angle between them |
| Case 4: | Three sides |

Note that if we were given all three angles we could not determine the sides uniquely; by similarity an infinite number of triangles have the same angles.

In this chapter we will learn how to solve a general triangle in all four of the above cases. Though the methods described will work for right triangles, they are mostly used to solve **oblique triangles**, that is, triangles which do not have a right angle. There are two types of oblique triangles: an **acute triangle** has all acute angles, and an **obtuse triangle** has one obtuse angle.

As we will see, Cases 1 and 2 can be solved using the *law of sines*, Case 3 can be solved using either the *law of cosines* or the *law of tangents*, and Case 4 can be solved using the law of cosines.

## 2.1 The Law of Sines

**Theorem 2.1. Law of Sines:** If a triangle has sides of lengths $a$, $b$, and $c$ opposite the angles $A$, $B$, and $C$, respectively, then

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \; . \tag{2.1}$$

Note that by taking reciprocals, equation (2.1) can be written as

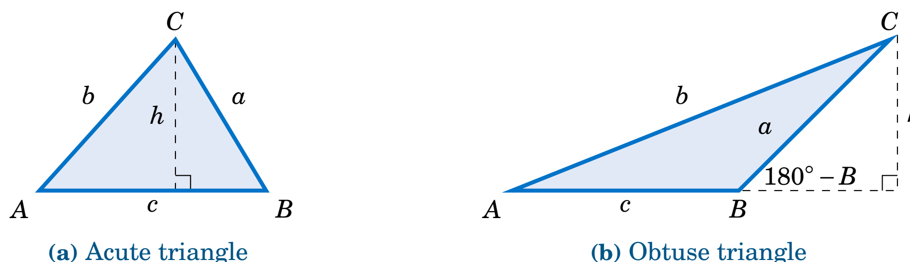
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \; , \tag{2.2}$$

and it can also be written as a collection of three equations:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \; , \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \; , \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} \tag{2.3}$$

Another way of stating the Law of Sines is: *The sides of a triangle are proportional to the sines of their opposite angles.*

To prove the Law of Sines, let $\triangle ABC$ be an oblique triangle. Then $\triangle ABC$ can be acute, as in Figure 2.1.1(a), or it can be obtuse, as in Figure 2.1.1(b). In each case, draw the *altitude*[1] from the vertex at $C$ to the side $\overline{AB}$. In Figure 2.1.1(a) the altitude lies inside the triangle, while in Figure 2.1.1(b) the altitude lies outside the triangle.




**(a)** Acute triangle

**(b)** Obtuse triangle

**Figure 2.1.1** Proof of the Law of Sines for an oblique triangle $\triangle ABC$

Let $h$ be the height of the altitude. For each triangle in Figure 2.1.1, we see that

$$\frac{h}{b} = \sin A \tag{2.4}$$

and

$$\frac{h}{a} = \sin B \tag{2.5}$$

(in Figure 2.1.1(b), $\frac{h}{a} = \sin(180° - B) = \sin B$ by formula (1.19) in Section 1.5). Thus, solving for $h$ in equation (2.5) and substituting that into equation (2.4) gives

$$\frac{a \sin B}{b} = \sin A \,, \tag{2.6}$$

and so putting $a$ and $A$ on the left side and $b$ and $B$ on the right side, we get

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \,. \tag{2.7}$$

By a similar argument, drawing the altitude from $A$ to $\overline{BC}$ gives

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \,, \tag{2.8}$$

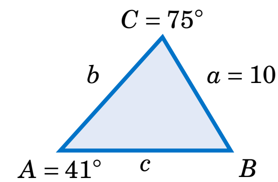
so putting the last two equations together proves the theorem. **QED**

Note that we did not prove the Law of Sines for right triangles, since it turns out (see Exercise 12) to be trivially true for that case.

[1] Recall from geometry that an altitude of a triangle is a perpendicular line segment from any vertex to the line containing the side opposite the vertex.

***Example 2.1***

*Case 1: One side and two angles.*
Solve the triangle $\triangle ABC$ given $a = 10$, $A = 41°$, and $C = 75°$.




**Solution:** We can find the third angle by subtracting the other two angles from 180°, then use the law of sines to find the two unknown sides. In this example we need to find $B$, $b$, and $c$. First, we see that

$$B = 180° - A - C = 180° - 41° - 75° \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 64°}\,.$$

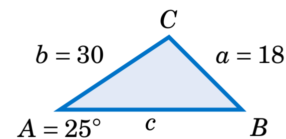
So by the Law of Sines we have

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \sin 64°}{\sin 41°} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 13.7}\,, \text{ and}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{10 \sin 75°}{\sin 41°} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 14.7}\,.$$

***Example 2.2***

*Case 2: Two sides and one opposite angle.*
Solve the triangle $\triangle ABC$ given $a = 18$, $A = 25°$, and $b = 30$.



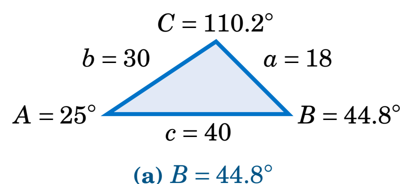

**Solution:** In this example we know the side $a$ and its opposite angle $A$, and we know the side $b$. We can use the Law of Sines to find the other opposite angle $B$, then find the third angle $C$ by subtracting $A$ and $B$ from 180°, then use the law of sines to find the third side $c$. By the Law of Sines, we have

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{30 \sin 25°}{18} \quad \Rightarrow \quad \sin B = 0.7044\,.$$

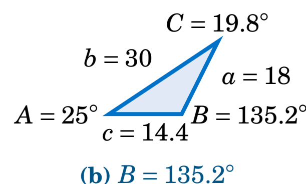
Using the $\boxed{\sin^{-1}}$ button on a calculator gives $B = 44.8°$. However, recall from Section 1.5 that $\sin(180° - B) = \sin B$. So there is a second possible solution for $B$, namely $180° - 44.8° = 135.2°$. Thus, we have to solve *twice* for $C$ and $c$ : once for $B = 44.8°$ and once for $B = 135.2°$:

| $\boxed{B = 44.8°}$ | $\boxed{B = 135.2°}$ |
| --- | --- |
| $C = 180° - A - B = 180° - 25° - 44.8° = 110.2°$ | $C = 180° - A - B = 180° - 25° - 135.2° = 19.8°$ |
| $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{18 \sin 110.2°}{\sin 25°}$ | $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{18 \sin 19.8°}{\sin 25°}$ |
| $\Rightarrow c = 40$ | $\Rightarrow c = 14.4$ |

Hence, $\boxed{B = 44.8°,\ C = 110.2°,\ c = 40}$ and $\boxed{B = 135.2°,\ C = 19.8°,\ c = 14.4}$ are the two possible sets of solutions. This means that there are two possible triangles, as shown in Figure 2.1.2.




**(a)** $B = 44.8°$




**(b)** $B = 135.2°$

**Figure 2.1.2** Two possible solutions

In Example 2.2 we saw what is known as the *ambiguous case*. That is, there may be more than one solution. It is also possible for there to be exactly one solution or no solution at all.

***Example 2.3***

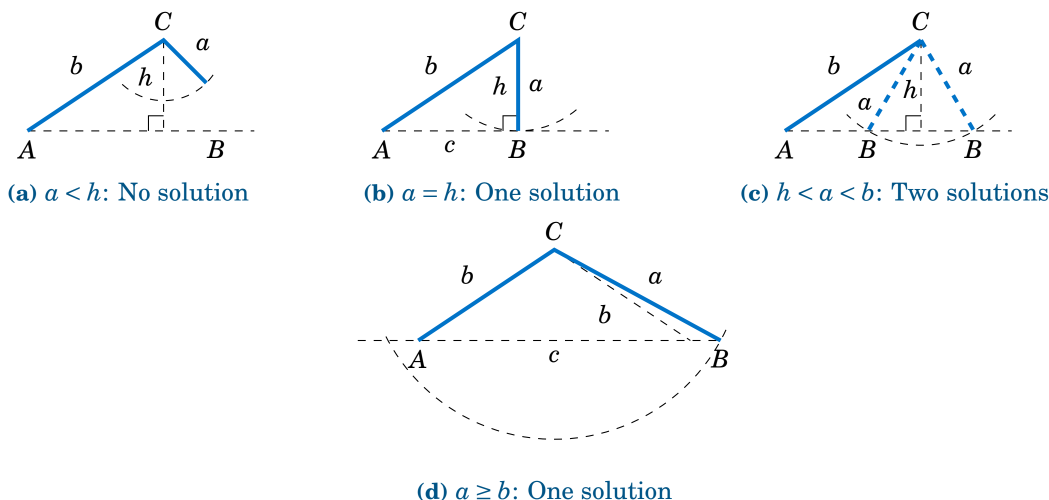
*Case 2: Two sides and one opposite angle.*
Solve the triangle $\triangle ABC$ given $a = 5$, $A = 30°$, and $b = 12$.

**Solution:** By the Law of Sines, we have

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \quad\Rightarrow\quad \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{12 \sin 30°}{5} \quad\Rightarrow\quad \sin B = 1.2\,,$$

which is impossible since $|\sin B| \le 1$ for any angle $B$. Thus, there is $\boxed{\text{no solution}}$.

There is a way to determine how many solutions a triangle has in Case 2. For a triangle $\triangle ABC$, suppose that we know the sides $a$ and $b$ and the angle $A$. Draw the angle $A$ and the side $b$, and imagine that the side $a$ is attached at the vertex at $C$ so that it can "swing" freely, as indicated by the dashed arc in Figure 2.1.3 below.




**(a)** $a < h$: No solution

**(b)** $a = h$: One solution

**(c)** $h < a < b$: Two solutions

**(d)** $a \ge b$: One solution

**Figure 2.1.3** The ambiguous case when $A$ is acute

If $A$ is acute, then the altitude from $C$ to $\overline{AB}$ has height $h = b \sin A$. As we can see in Figure 2.1.3(a)-(c), there is no solution when $a < h$ (this was the case in Example 2.3); there is exactly one solution - namely, a right triangle - when $a = h$; and there are two solutions when $h < a < b$ (as was the case in Example 2.2). When $a \ge b$ there is only one solution, even though it appears from Figure 2.1.3(d) that there may be two solutions, since the dashed arc intersects the horizontal line at two points. However, the point of intersection to the left of $A$ in Figure 2.1.3(d) can not be used to determine $B$, since that would make $A$ an obtuse angle, and we assumed that $A$ was acute.

If $A$ is not acute (i.e. $A$ is obtuse or a right angle), then the situation is simpler: there is no solution if $a \le b$, and there is exactly one solution if $a > b$ (see Figure 2.1.4).

The RMB makes the “starting point” or יום העיקר thursday evening [shkiah time [20 minutes after shkiah]] gimmel nissan 4938. He gives all data for that day and time.

We figured out that Thursday gimmel nissan 5774 that is april 3 2014, 305,347 days have passed since the RMB yom haikkar. [exactly 43621 weeks, also exactly 44 Machzorim [836 years]] so we will choose this day as yom haikkar.

The mean sun it is 11.48152103
Makom hagovah is 99.47501389
Emtsa Yareach 44.60748991
Emtsa Maslul 277.0969369
Makom Harosh 210.0703861

Values for the motion of each one per day [in decimal form]

MEAN SUN .985647222
MAKOM HAGOVAH .4166666
EMTSA YAREACH 13.17639722
EMTSA MASLUL 13.06498056
MAKOM HAROSH -.052952778 [remember: it travels NEGATIVE see RMB]

I used the RMB values to get these new values. [you can do it yourself!]

To find the amount of days that have passed since yom haikkar, i suggest converting the Hebrew date into a secular date, and then it's quite easy.

Example: Rosh Chodesh Elul Friday 5780. Is aug 21 2020
Now we count 365 days or 366 for a leap year. So we have 6*365 +2 =2192 days upto april 3 2020. Now just add 27+may+ june+ july +21 =140. So the total is 2332 days from yom haikkar

Note: to “check” your work, simply take the final number [2332] and find its remainder [dividing it by 7] then see if that matches to your day of the week. Example: we divide 2332 by 7 we get remainder 1, also we know that the day we are considering is friday that is one day after thursday [the yom haikkar]

Now we shall get all values for this friday
2332*MEAN SUN + yom haikkar mean sun = 150.0108427
2332*MAKOM GOVAH + “””” makom govah= 351.141665
2332*EMTSA YAREACH+ yom haikkar emtsa yareach= 171.965807
2332*EMTSA MASLUL + “” “”” emtsa maslul= 144.6316028
2332*MAKOM HAROSH + “”” makom harosh= 86.5845078

Also note that the ratio of ce/cs [the sun model] is given as .03461

We will give here a more simple approach to calculate tosefes maslul [and then menus maslul] BSD

See d 171 e is earth, o is a point in space that c [the center of the moons epicycle] revolves. So we have eo constantly turn [clockwise] and oc also turning [counterclockwise] the COMBINATION of their daily turns, gives us the emtsa hayereach [13.1764] that's how much the point c moves daily as viewed from earth.

We will give the data provided by dr. feldman as ptolemy has it:
oc=2981 cm=314 eo=619

The moon [m in the diagram] travels clockwise around point c, but there is also a slight movement when the whole epicycle turns, and that is the arc ab. This is defined by drawing a line pe in space, that is exactly the same as eo, then we draw a line from point p until it reaches c, and continues until b, we get an arc ab, so we turn the whole epicycle that tiny amount. That is called tosefes maslul, because AFTER we find emtas maslul, we must ADD this tiny arc [ab] then we get maslul nuchon, finally we use that to get menus maslul [will be explained in the end]

How do we find arc ab? See diagram 171, extend line ce so that we can form a right triangle cdp, also draw bo perpendicular to ce so that it hits point o, as seen in diagram. Note that triangle ebo and edp are similar [they have all angles the same, and also one side [eo=ep]]

The rule of "merchak kuful" is: the angle between the sun and the moon [emtsa shemesh [not shown in diagram] and emtsa yareach [point c]] will ALWAYS be half the angle cek [k is the makom hagovah of the moon] so as long as we know the distance between the sun and moon, we also know angle cek [just double the merchak!] so all we need is to take the angle beo [same as cek] and work a bit, till we get angle pce [or pcd] [that is arc ab=tosefes maslul]

First we can write:
Tan pcd= pd/ [cb+be+ed]
Lets call angle beo, mk [merchak kuful]
Write: sin mk =ob/eo   ob= eo * sin mk
Also cos mk =eb/eo    eb= eo * cos mk
Note that ed=eb   also ob=pd
Also we can write: ob sqr + cb sqr = oc sqr
And bc= sqrt [ oc sqr - ob sqr]

Finally we will rewrite the first equation

Tan pcd=
eo * sin mk/ {sqrt [oc sqr - [eo*sin mk] sqr] + 2 *eo cos mk}
For convenience we will rearrange the ratios of eo co and cm, we will have eo=1 co=4.815832 [cm=.50727]

So we can rewrite
tan pcd=sin mk/ { sqrt[23.2-sin mk]+2 cos mk}
This is the final equation we will use to find tosefes maslul, given mk

Now we will find menus maslul given maslul nuchon.
See d. 172 arc am is given [maslul nuchon] we must find angle cem

Draw mn perpendicular to ace
Note that acm [or ncm] = arc cm [that is given as maslul nuchon]

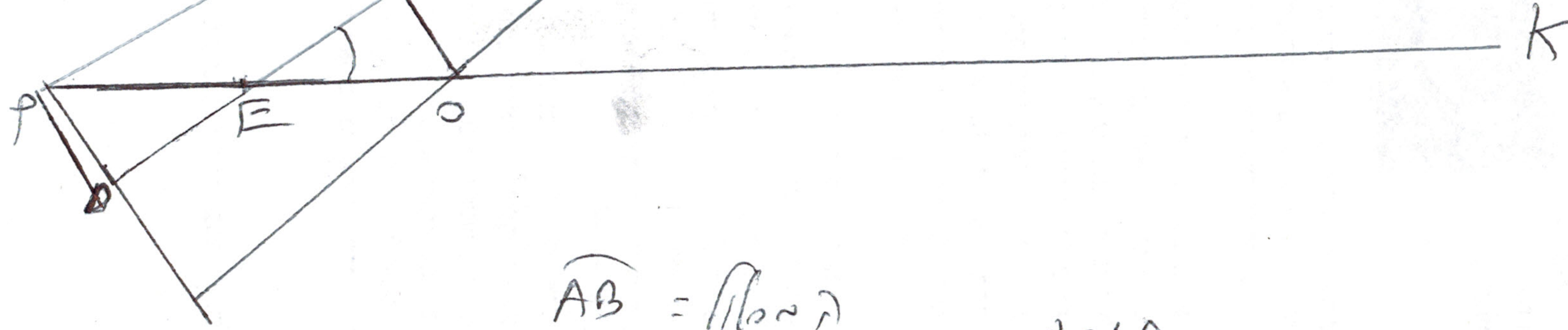
Now write tan nem= nm/ne
Cos ncm=nc/cm nc= cm* cos ncm
Sin ncm= nm/cm nm= cm*sin ncm
Also ec is known from above, also ne=nc+ec
So we can solve for angle nem

We will give a sample BSD. say that merchak kuful is 50, also that emtsa maslul is 111, find menus maslul

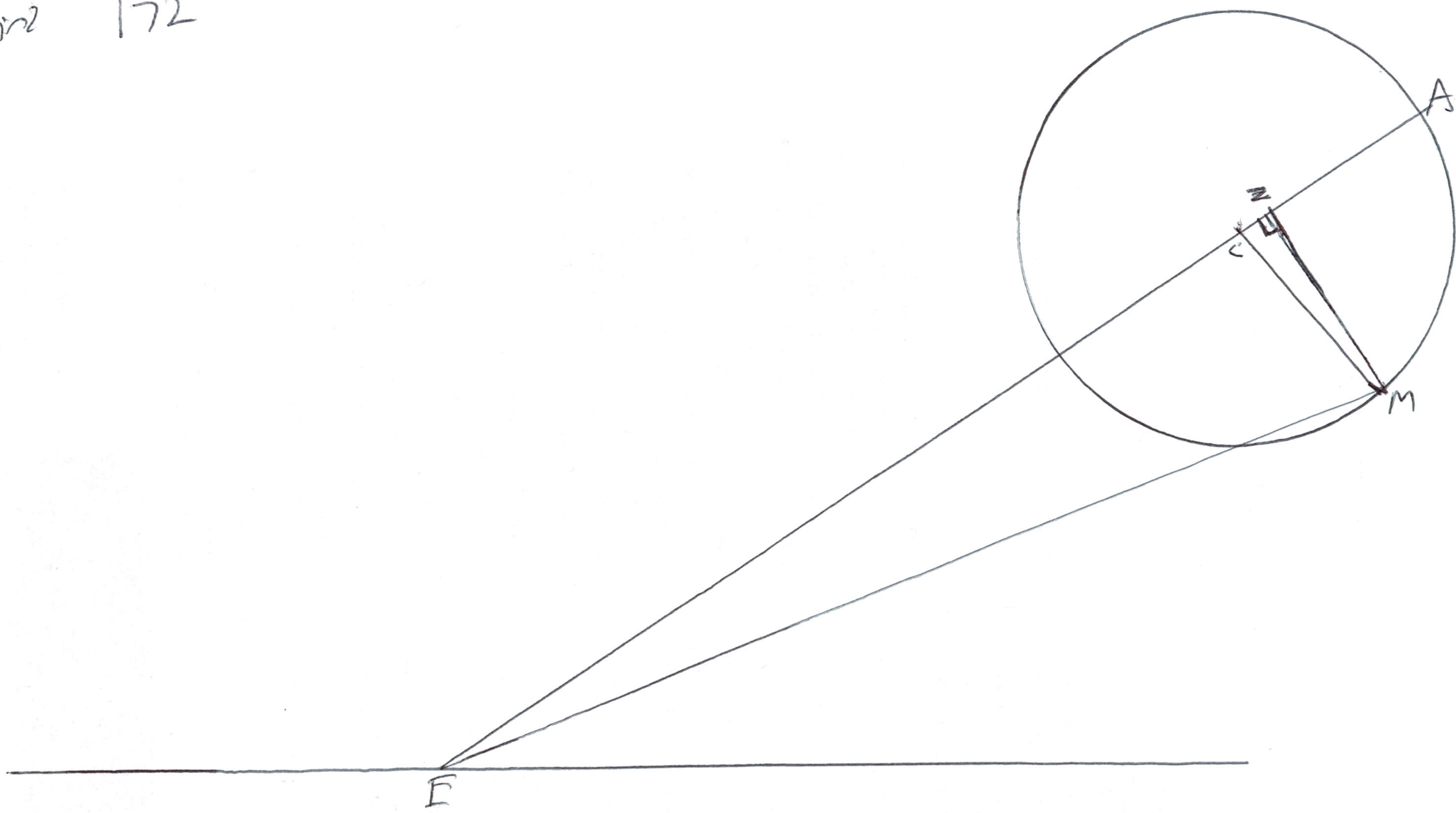
TM=tosefes maslul

1) We use tan TM= sin 50 / {sqrt[23.2-sin 50]+2cos 50}
   TM=7.25
   Now we add this to 111 so the maslul nachon is 118.25
   Now we find menus maslul [MM]
   Tan MM= .50727 sin 118.25/ .50727*cos 118.25+ec

   From above we know that ec=sqrt[23.2-sin 50]+cos 50= 5.38
   Finally solve MM= 4.968653 that's how much degrees we must DEDUCT from emtsa yareach to find yareach amiti
   [Note if maslul nachon is more that 180, we follow everything the same, but we must ADD MM to emtsa yereach]



A
B
C
M
K
P
D
E
O
B
$\overset{\frown}{AB}$ =
∢PCE
∢CEO =




מנת המסלול = $\sphericalangle CEM$

please refer to the spherical triangle. Take an orange, cut it in half, then take a magic marker and mark 2 points on the "equator" that touches the table. Now a third point somewhere "higher" [in between the two points that you have already drawn] on the orange. Now "connect the dots" you have just created a "spherical triangle"

A spherical triangle has 6 angles. 3 simple ones, and 3 "hidden ones". The simple ones are the arcs that you just lined out on the orange. You can see that there are three arcs, one connecting point A with point B [both of them are touching the table!] then you have an arc connecting A and C, also B and C. These arcs all have different angles [why not!]

Now comes the "hidden ones". Arc AC and arc AB [the plane of the table] form a "angle" with each other. [just take a book and put it with an angle towards the table] so does arc BC form a certain angle with the table. So do AC and BC [these planes] form an angle with each other, so we have another 3 angles. Now we name the three "easy angles" a b c and the three "hidden angles" A B C [the angle opposite a is A, and so with b and c]

See the image below. You can read the proofs of the final "fundamental cosine and sine formulae"

vertices and take any point $P$ in $OC$. From $P$ draw $PQ$ perpendicular to $OA$ and $PR$ perpendicular to $OB$. In the plane $OAB$, draw $QS$ perpendicular to $OA$ and $RS$ perpendicular to $OB$. These perpendiculars meet in $S$. Join $PS$ and $OS$. If we draw tangents at $A$ to the great circle arcs $AB$ and $AC$, these tangents, by definition, include the spherical angle $A$. But $QS$ and $QP$ are by construction parallel to these tangents. Hence $P\hat{Q}S = A$. Similarly $P\hat{R}S = B$. Also $C\hat{O}B = a$, $C\hat{O}A = b$ and $A\hat{O}B = c$.

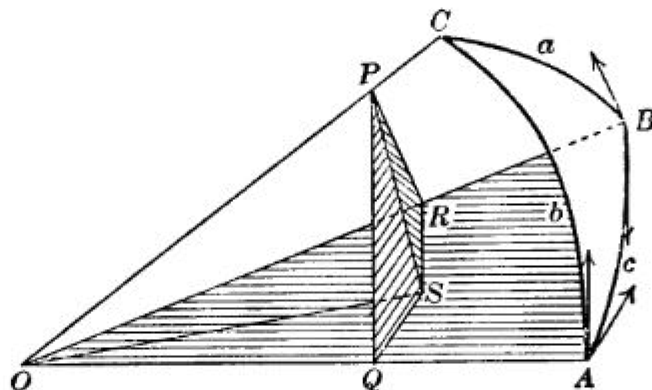



Fig. 6.

The first step is to prove that $PS$ is perpendicular to the plane $AOB$. By the construction, $OQ$ is perpendicular to both $PQ$ and $QS$; hence $OQ$ is perpendicular to the plane $PQS$; therefore $OQ$ is perpendicular to $PS$ which is a line lying in the plane $PQS$. Similarly, $OR$ is perpendicular to $PS$. Thus $PS$ is perpendicular to both $OQ$ and $OR$ and is therefore perpendicular to every line in the plane of $OQ$ and $OR$, that is, $PS$ is perpendicular to the plane $OAB$ and, in particular, to $OS$, $SQ$ and $SR$. Thus $PQS$ and $PRS$ are right-angled triangles.

(1) We have, from the right-angled triangles $OQP$ and $ORP$,

$$PQ = OP \sin b; \quad PR = OP \sin a \qquad \text{......(19).}$$

$$OQ = OP \cos b; \quad OR = OP \cos a \qquad \text{......(20).}$$

Let $x$ denote the angle $SOQ$; then $R\hat{O}S = c - x$.

Now $\qquad OS = OQ \sec x$ and $OS = OR \sec (c - x)$.

Hence $\qquad OR \cos x = OQ \cos (c - x)$;

$\therefore$ by (20), $\quad OP \cos a \cos x = OP \cos b \cos (c - x)$;

$$\therefore \quad \cos a = \cos b \cos c + \cos b \sin c \tan x.$$

But $$\tan x = \frac{QS}{OQ} = \frac{PQ \cos A}{OQ} = \tan b \cos A,$$

and hence $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

which is formula **A**.

(2) Again, from the right-angled triangles $PQS$ and $PRS$,

$$PS = PQ \sin PQS = PQ \sin A,$$

and $$PS = PR \sin PRS = PR \sin B.$$

Hence $$PQ \sin A = PR \sin B,$$

and $\therefore$ by (19),

$$OP \sin b \sin A = OP \sin a \sin B,$$

from which formula **B** follows.

(3) We have, from the right-angled triangles $OSQ$ and $OSR$,

$$QS = OS \sin x \quad \text{and} \quad RS = OS \sin (c - x);$$

$$\therefore \; RS \sin x = QS (\sin c \cos x - \cos c \sin x),$$

or $$RS = QS (\sin c \cot x - \cos c).$$

Now $$RS = PR \cos B = OP \sin a \cos B,$$

and $$QS = PQ \cos A = OP \sin b \cos A,$$

and $$QS \cot x = OQ = OP \cos b.$$

Hence $$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

which is formula **C**.

**10.** *Right-angled and quadrantal triangles.*

When one of the spherical angles is 90°, the formulae **A**, **B**, **C** and **D** assume simple forms. This is also the case when one side of a spherical triangle is 90°—the triangle is then said to be *quadrantal*. Rules have been given by Napier according to which the various simple formulae can be written down. The rules, however, impose an additional charge on the memory and it is much simpler to apply one of the main formulae **A** to **D** to the particular right-

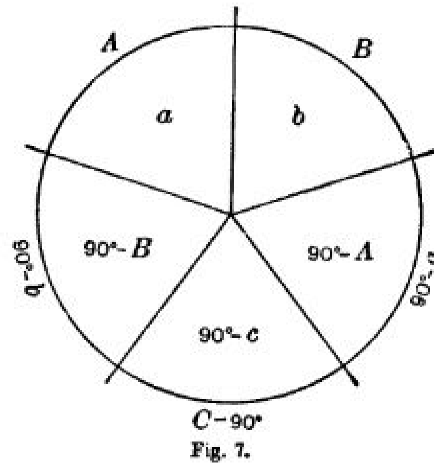



Fig. 7.

you can skip the last part [right angled...]

To understand this figure, it is good to DO IT YOURSELF!

First decide on a length op, say 5 inches. Now lets assume that we know angle poq [or “small b”] is 40 degrees so oq and pq are known-- oq=cos (40) *5=3.83 and pq is sin (40)*5=3.214

Now lets assume we also know angle por [or “small a”]=30 degrees

We have or=cos(30)*5=4.33. And pr=sin(30)*5=2.5

See figure 8 [it is made to scale!] now copy this figure on a piece of paper, then cut it around the border, and then FOLD the paper at op [o should touch the table and p should be high up--and the two “walls” are orp and oqp]

Now take this mini “tent” and put it on top of a different flat paper and see that you can “push down” or flatten the tent or make it “steep” so you decide how much to flatten it. Then write on the flat paper [on the points where the tent touches the paper] o r q also remember that the point of the tent is p. Also connect or and oq [make sure the “tent” doesn't stick out...] also draw rs perpendicular to or, and qs perpendicular to oq [these two lines [rs and qs] shall meet at s, were ps is perpendicular to the paper [see proof in the book ...the first step is...]

Figure 9 is the flat paper that you build the tent on its surface

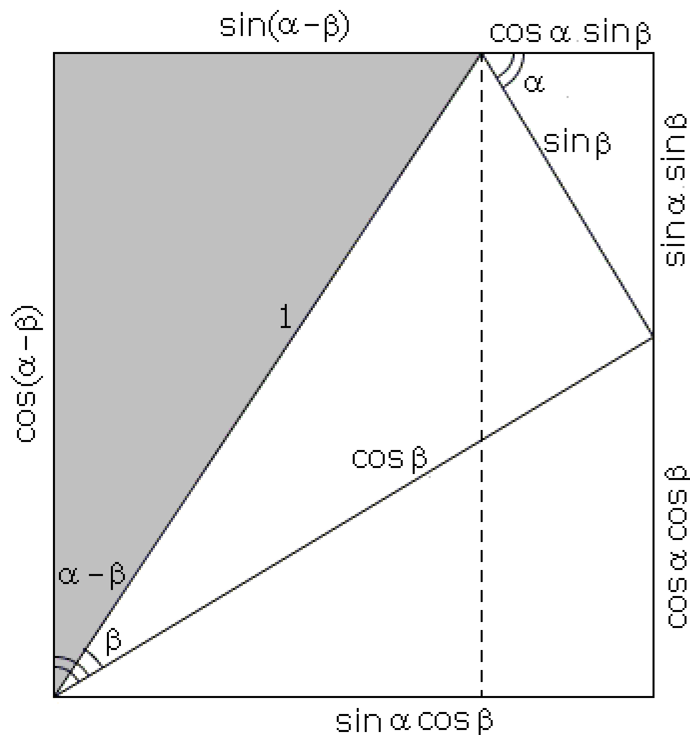
Now imagine that each line CONTINUES in its direction until it reaches a point that is on the surface of a sphere. So or and oq and op ALL go a bit longer to reach the SURFACE of a sphere

You may realize that angle roq “represents” small c. angle rop represents small a. And angle qop represents small b [think about this a bit..]

Also pqs is big A [ s is a toothpick dropped from p till the flat paper, the point where the toothpick touches the paper, is called s [the toothpick is PERPENDICULAR to the surface of the paper [see the proof ...The first step...]] prs is big B

Now you should have many right triangles.... I will enumerate them: orp oqp rsp qsp ors oqs

Now you can start the proofs




It is important to know this identity cos (a-b)= cos (a) cos (b) + sin (a) sin (b)

This figure shows the proof

Now you can follow the spherical proof. Follow each line and take a look at the tent.. Make sure you follow along each line. The last line we have cos (a)= cos (b) cos(c) + cos(b) sin (c) tan (x) this is based on the identity just stated above.

Because we have cos(a)cos(x)=cos(b)cos(c-x) so we can rewrite the right side as:

cos(b) cos(c)cos(x)+ cos(b) sin(c)sin(x)

Then we divide both sides [right and left] by cos(x)

We get cos (a)= cos(b)cos(c)+cos(b)sin(c)tan(x)

[remember tan(x)=sin(x)/cos(x)]

Finally we replace tan(x) with tan(b)cos(A) [see how]

So we have:

cos(a)=cos(b)cos(c)+cos(b)sin(c)tan(b)cos(A)

Or cos a= cos b cos c+sin c sin b cos A

This is formula aleph or formula A. Review it a few times to get it clear.

The next formula is called the sine formula it states that $\sin(a)/\sin(A)=\sin(b)/\sin(B)=\sin(c)/\sin(C)$ [formula B]

Read it. and follow it on the 3-d model that you created

The third formula is based on the fact that $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

See figure above for proof

Now we start with $rs=qs[\sin(c)\cot(x)-\cos(c)]$ GIMMEL

b/c We divided both sides by $\sin(x)$

Then we find another equality for $rs= op \sin(a) \cos(B)$

For qs we find $qs=op \sin(b) \cos(A)$

Now rewrite GIMMEL:

$op \sin(a) \cos(B)= qs \cot(x) \sin (c) -op \sin(b)\cos(A)\cos(c)$

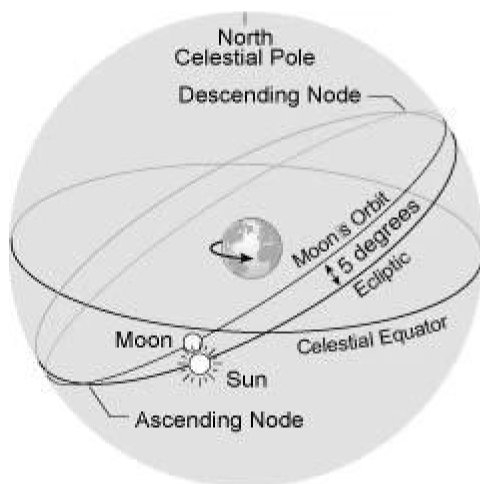
But $qs \cot(x)=op \cos(b)$

Finally we factor out op from each entry and we get

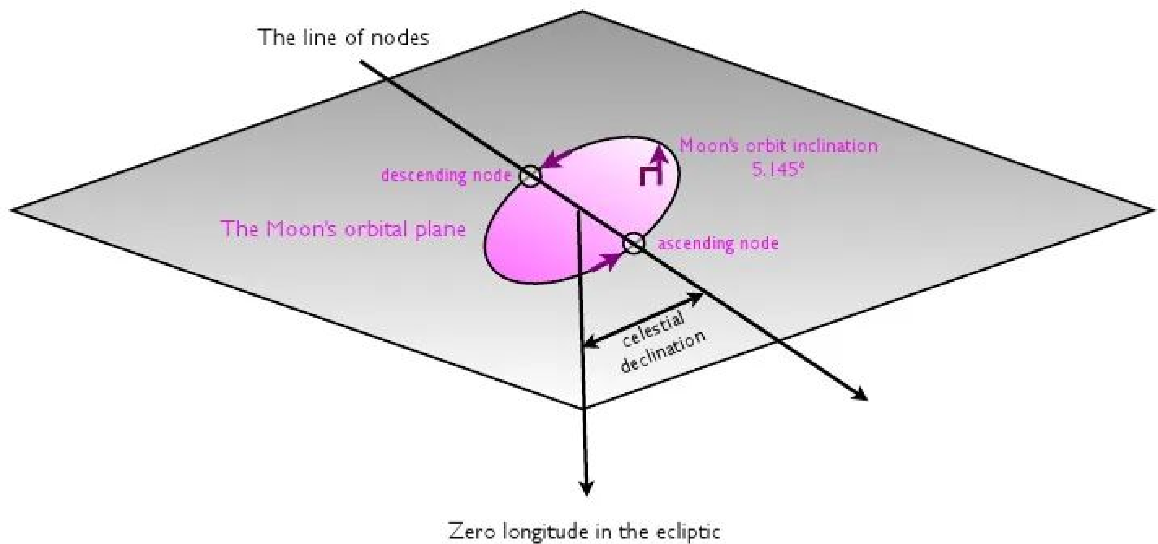
$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos A \cos c$ [formula C]

Ok so now we have all our working tools...we can start

The moon is inclined towards the ecliptic, it has two "nodes" that is where it meets with ecliptic [ROSH and ZONOV] the RMB gives us the ROCHAV YAREACH according to MASLUL YAREACH

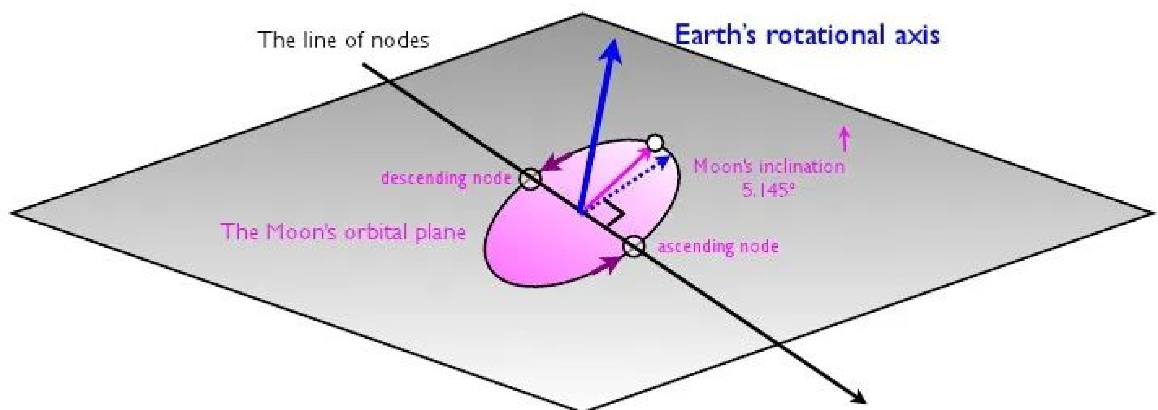


### The ecliptic - Earth's orbital plane



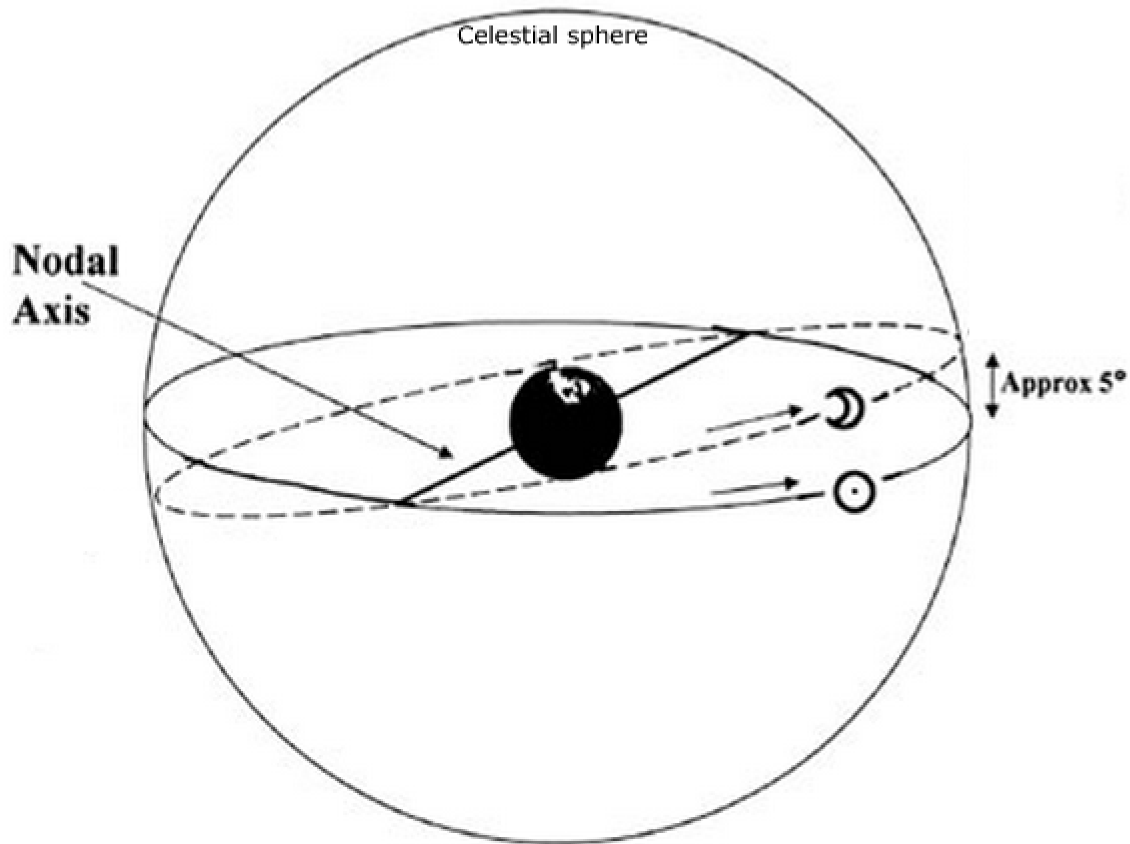

The orbit of the Moon is inclined at an angle of 5.145° to the ecliptic. The Moon has two nodes: the ascending node is where the Moon passes upward through the ecliptic, and the descending node is where it passes downward. The line of nodes is the line in the ecliptic that passes through the nodes. The angle between the zero longitude in the ecliptic and the line of nodes is the celestial declination of the Moon's nodes. Owing to gravitational perturbations this angle makes a complete rotation in the ecliptic plane in 18.6 years.

### The ecliptic - Earth's orbital plane




**For practical purposes the Earth's rotational axis is fixed in the celestial sphere and directed at 23.45° to the vertical. When the line of nodes is perpendicular to the projection on the Earth's axis onto the ecliptic and the Moon is above the ecliptic, the angle between the Earth's axis and the Moon is at its minimum. At this time the Earth's**

We shall have a spherical triangle with




We use the second formula [known as the "sine formula"] see figure 9. Note that the straight lines in the figure are really arcs of a spherical circle. Now we know that

sin c / sin C = sin a / sin A  that is:

sin [maslul yareach]= sin rochav/ sin 5^

Or sin 5^ * sin maslul = sin rochav

So for maslul of 30^ solve for rochav= 2.4976^ [see RMB 16:11 gives 2.5]

If the maslul is greater than 90 then do 180-x [80 and 100 have the same]

If the maslul is greater than 180^ then just deduct 180 and make sure to have a minus [because it is SOUTH of the ecliptic---maslul DEROMI]

The more accurate way is:

because really the maslul yareach is measured on the ecliptic! [we have an imaginary moon traveling ON the ecliptic, so the final number we got [after ALL calculations of above] is referring to this moon [not to the REAL moon that its plane is inclined 5^ to the ecliptic

We need to introduce a new formula

To show that cot a sin b = cot A sin C + cos b cos C.

We have

cos a = cos b cos c + sin b sin c cos A,

cos c = cos a cos b + sin a sin b cos C,

sin c = sin a sin C /sin A .

Substitute the values of cos c and sin c in the first equation; thus

cos a = (cos a cos b + sin a sin b cos C) cos b +sin a sin b cos A sin C/sin A

multiply out cos b by [cos a cos b+sin a sin b cos C]

then bring it to the left side of the equation

Then use the identity : 1-cos(sqr)b = sin(sqr)b, finally you get

cos a sin(sqr) b=sin a sin b cos b cos C+ sin a sin b cot A sin C

divide by sin a sin b;

thus cot a sin b = cos b cos C + cot A sin C [formula D]

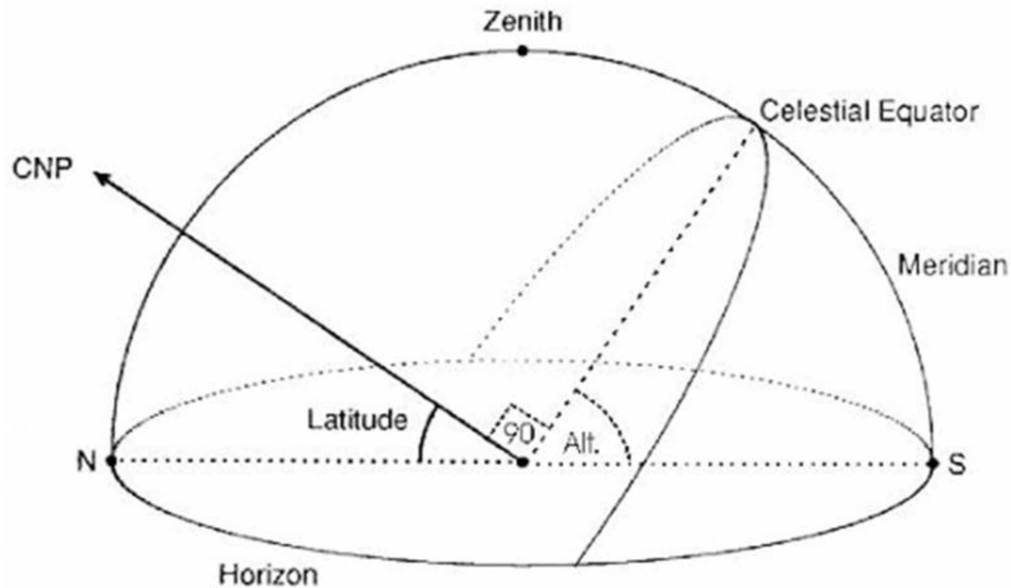
Lets solve for maslul yareach of 30

Cot (rochav)   sin (30)= cot (5)

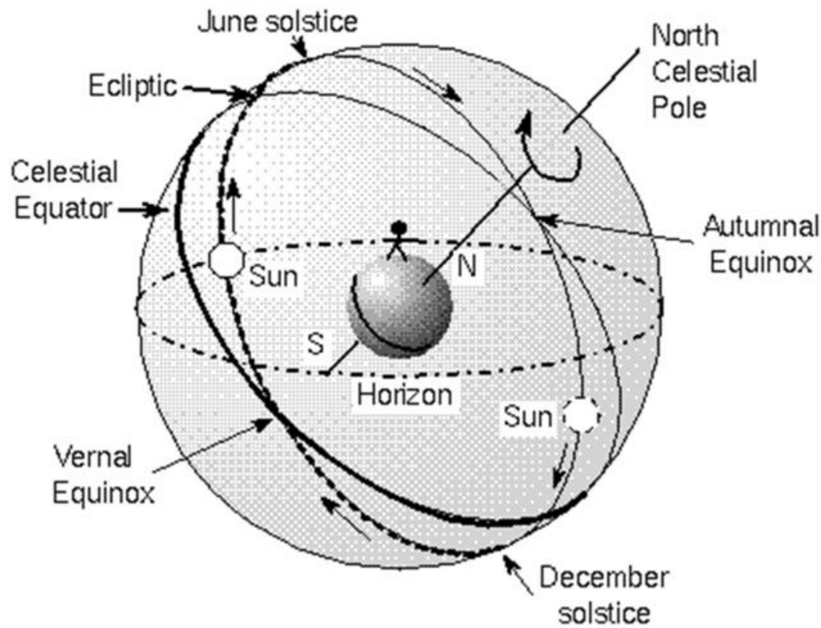
Or cot(rochav)=2*cot(5)

2.50478 [even closer to RMB!]

We must start with some basic stuff. If someone lives in EY [erets yisrael] his latitude is 32^ [check it out on a globe] now we know that the NCP [north celestial pole] for EY is 32^ above his horizon. Also the CE celestial equator is inclined 58^ to the horizon



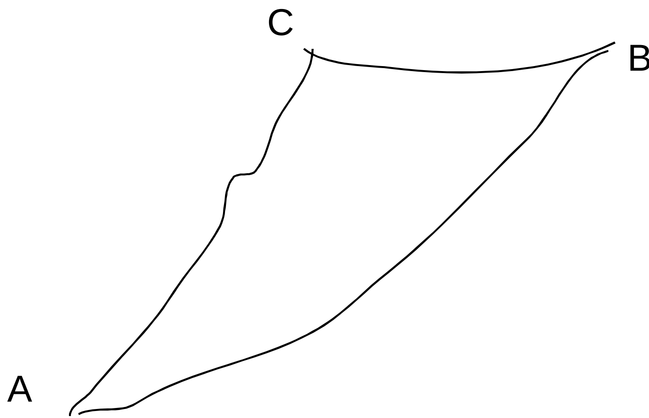

but we also have an “ecliptic” GALGAL HAMAZOLOS that is 23.5^ inclined towards the CE. so during a 24 hour period, as the CE turns and is constantly at a 58^ inclination towards the horizon, the ecliptic keeps on changing its inclination.




The Sun moves among the stars along the ecliptic, completing one 360° path in one year. The ecliptic is tilted by 23.5° with respect to the celestial equator. The Sun's position on the celestial sphere in April (full circle) and in October (dashed circle) is shown.

to really understand whats happening, get a small globe [you can get it at a 99 cents store] then imagine that this is the celestial sphere [NOT A WORLD GLOBE!!!] and take a glass that exactly half of this globe fits in. make sure that the "equator" [now the CELESTIAL EQUATOR!] is 58^ inclined towards the rim of the glass [the rim of the glass is the "horizon"] also mark on the globe with a magic marker the "eclitic circle" [it should touch the CE at two points you can use 0 and 180 of the longitude as the two points] half of the ecliptic is below the CE, and half is above. Now start turning the globe but make sure the CE is ALWAYS 58^ towards the horizon, you will realize the the ecliptic KEEPS on changing its inclination towards the horizon!

Lets draw a sketch for the spherical triangle we need to solve in order to know HOW LONG it will take for TLEH to set [that is from 0-30 on the galagal hamazolos]




CB is the horizon

AC is 30^ [that means that TLEH is TOTALLY below the horizon]
AB is the CE [celestial equator]
Now we know that A is 23.5, also B is 58 [in EY the CE is always 58 towards the horizon] we need to solve for AB [or call it c [small c]]
How much of the CE set, while TLEH set?
First solve for a thru the sine formula sin a/ sin A= sin b/ sin B
Or sin a= [sin 30/ sin 58] * sin 23.5
a=13.5974081672
Now we use [see spherical laws] cos a= cos b cos c+sin c sin b cos A
Rewrite as:
cos a= cos b (cos c + sin c tan b cosA)
Now assume that there exists a value w, so that tan (w) = tan b cos A

So rewrite cos a = cos b (cos c + sin c tan w) = cos b cos(c-w ) / cos w
[ Remember cos (c-w)= cos c cos w + sin c sin w ] see spherical laws

So cos (c-w)= cos a cos w / cos b
Write all of this on a paper so you can follow along all the manipulations!

Finally we solve for c

So here are the steps: first find tan (w)= [tan 30* cos 23.5]= so w= 27.9

Now cos (c-w)= cos [13.5974] cos [27.9] / cos [30]
Cos (c-w)= .99188, and (c-w)= 7.3055^

But w= 27.9, so c must be 35.2055
So the final answer: it takes 35.2055*4= 140.822 minutes for TLEH to set in EY [understand: 30^ of the CE to set takes 30*4=120 minutes. ONLY when we are considering the ECLIPTIC [galgal hamazulus] THEN it makes a difference WHICH 30^ you are talking about. And here we figured out for the first 30^ [that is from 0-30] in EY! It takes 140.8 minutes to set

How about if you would like to know how long does it take from 27-61 ^
To set [I DAVKA picked random numbers..]
This is done in two steps: 1) from 0-27
2) from 0-61 . then deduct 1 from 2 and you get your answer

First find a. Sin a= sin 23.5* sin 27/sin 58 a=12.325
Next find w. Tan w=tan 27 * cos 23.5 w=25.045
Next write cos (c-w)= cos 12.325 cos 25.045 / cos 27
(c-w)=6.604 so c= 31.65 or 126.6 minutes

Now redo for 61
a=24.283 w=58.85 (c-w)=13.45 c=72.3 or 289.1974 minutes
Subtract 126.6 from 289.1974= 162.5974 minutes
So we have an arc of 34^ [61-27] that would take on AVERAGE 136 minutes
But it really takes 162.6 minutes that is what is called the LONG SETTERS

How about from 0-90?
Here we must use the original formula [because tan 90 is undefined]
So we use the simple formula cos a= cos b cos c + sin c sin b cos A
You should have a 3-d globe [its mamash a MUST] [you can order a celestial globe] make sure it has the CE the ECLIPTIC and the horizon. Set it up for EY where the CE is 58^ above the horizon. Now turn it so that we have 90^ of the ecliptic below the horizon [or the beginning of SARTAN is on the horizon]

We want to know how much of the CE [from 0^-?] is now below the horizon
Lets make a sketch [THIS DOES NOT REPLACE THE 3-D MODEL!!!]

Now CA is the horizon.   BC is 90^ of the ecliptic that is below the horizon
AB is the celestial equator that we want to find out.
Angle B =23.5 Angle A= 58 [in EY]
First find b [thru sine formula sin b/ sin 23.5= 1/sin 58] b=28.047
Now we can write the formula of above:
0=cos b cos c + sin b sin c cos A

- Cos b cos c = sin b sin c cos A
  -Cot 28.047/cos 58 = tan c
  c= -74.2345
  But c can not be negative! So add 180=105.76548 [you will see that tan [105.7654 also returns the same value as -74.2345] so we choose c to be 105.7654 [or 423 minutes--instead of 360 minutes!]

  Now we can follow a similar method for finding from 90-180 and you will find the result to be 74.2345  that is the complement  of 105.7654 [together they are 180]
  So we can see that from 0-30 and 150-180 are similar. It is the complement

Now we will see that 330-360 [that is the setting of mazal dagim] takes exactly the same time as 0-30 [its a mirror image] if you have a celestial globe it is obvious

Here is a sketch for Tleh beneath the horizon, [that is from 0-30]  and also a sketch for dagim [that is from 330-360] beneath the horizon. See page 17 a sketch for Tleh and Dagim. You can see right away that these are exactly the same [just flipped]

Now see page 18 sketch for Moznaim  that  has just set [that is from 180-210

Let's redo the formula: sin a= sin 23.5 sin 30 / sin 122

So far nothing changed a is still 13.597

Now tan w= tan 30 cos 23.5 so w is 27.9 still no change

The final step is cos [c-w] = cos 13.597 cos 27.9 / cos 30

Still no change . but we must realize that the value of

cos 13.597 cos 27.9 / cos 30 [.991883843] is the cosine

of positive 7.304777 and ALSO of -7.304777 so we can choose either one and we must make a decision according to the sketch-- we can see that by sketch 18 c is SMALLER than b [especially if you use a celestial globe] so we are forced to use [c-w]= NEGATIVE 7 . so if c-w=-7 c= -7.304777+27.9=20.595223

so we know that it takes 82.38 minutes for moznaim to set

as opposed to tleh that takes 140.819 minute

I will rewrite the steps for anything from 0-90

Sin a= sin 23.5 * sin galgal / sin 58

Tan w= tan galgal * cos 23.5

Cos [c-w] = cos a cos w / cos galgal . Now call c-w "z"

Final celestial eqautor = w+z

For 180-270 first subtract 180. Then do all steps the same. In the LAST step make sure to do: Final celestial equator = w-z [minus NOT plus]

From 360-270 subtract 360 minus galgal, then follow the rules "from 0-90"

From 180-90 subtract 180 minus galgal, then follow the rules "from 180-270"

An example: how long does is take to set from 100-130?

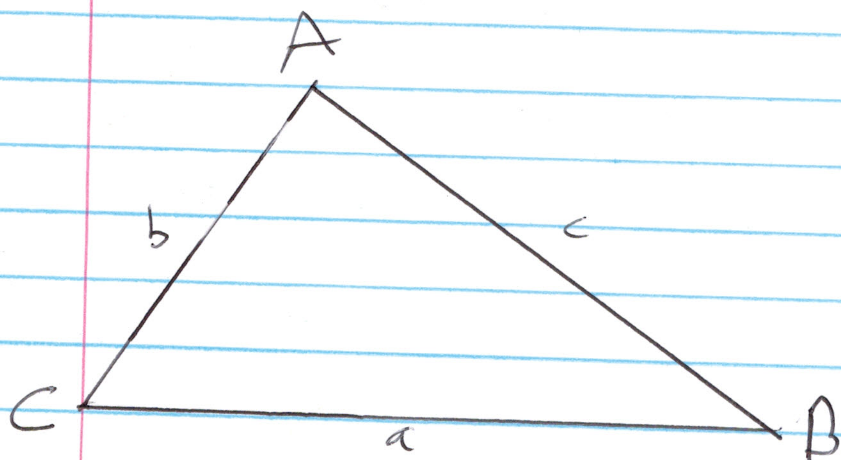
1) First find 100-180 [galgal=80 and final step is MINUS]
2) Then find 130-180 [galgal=50 and final step is MINUS]
3) Subtract 2 from 1

From all of the above we understand that when the moon is anywere from 270-90, then the moonset will be **quite a while** after sunset. Because lets say the moon is at 45 and the sun at 30 [that is orech rishon is 15^] it will be **quite a while** after sunset, till the moon sets. So it will be quite **dark** outside, so we have a better visibily of the moon, so the moon can have a smaller crecent and **still be seen well**

With all of this you will understand RMB perek 17 1-5

1

בס"ד




## Law of sines

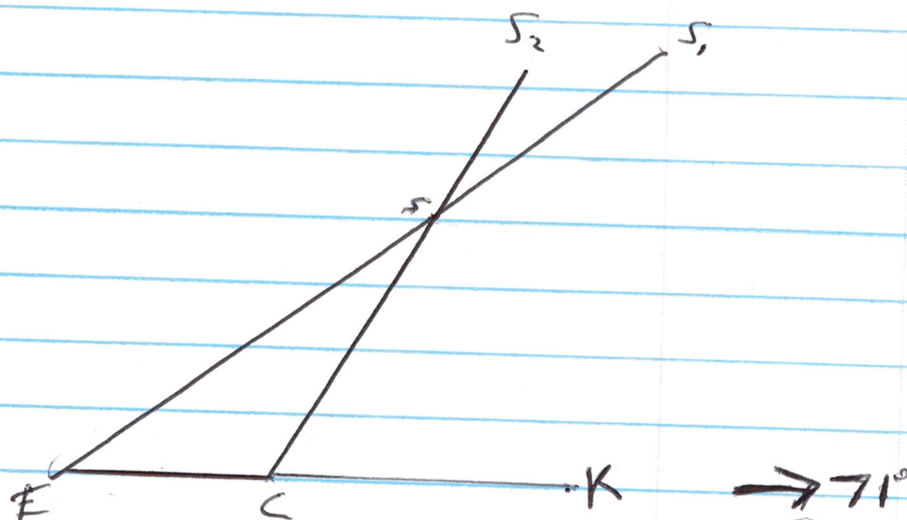
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

## Law of cosines

$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab \cos C$$

3

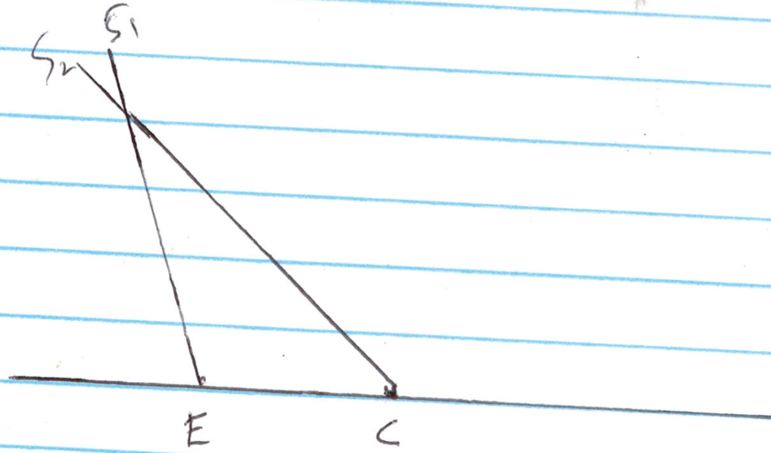
דג




C = the center of the sun
E = Earth.
S = the sun
$S_1$ = the sun viewed from Earth
$S_2$ " " " from center
K = הגובה [illegible] Apogee
∡ KCS מקום השמש
We know ∡ ECS
180 − 58 = 122°

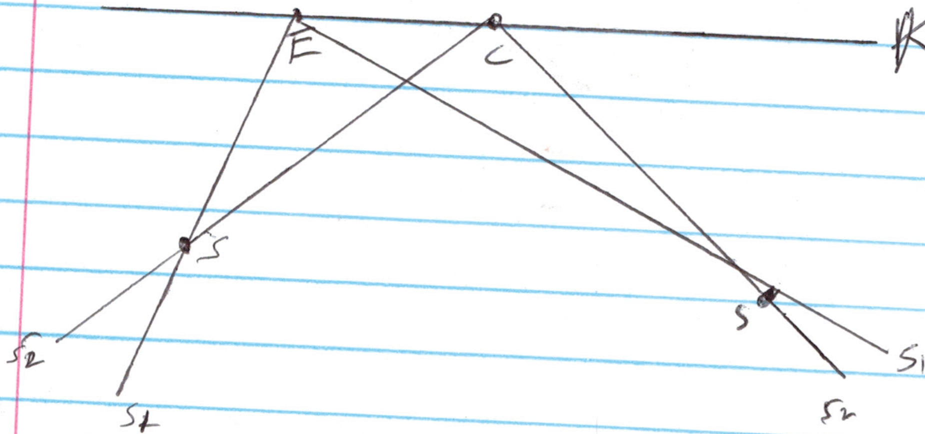
$$\frac{\sin \angle ESC}{EC} = \frac{\sin \angle SEC}{SC}$$

4



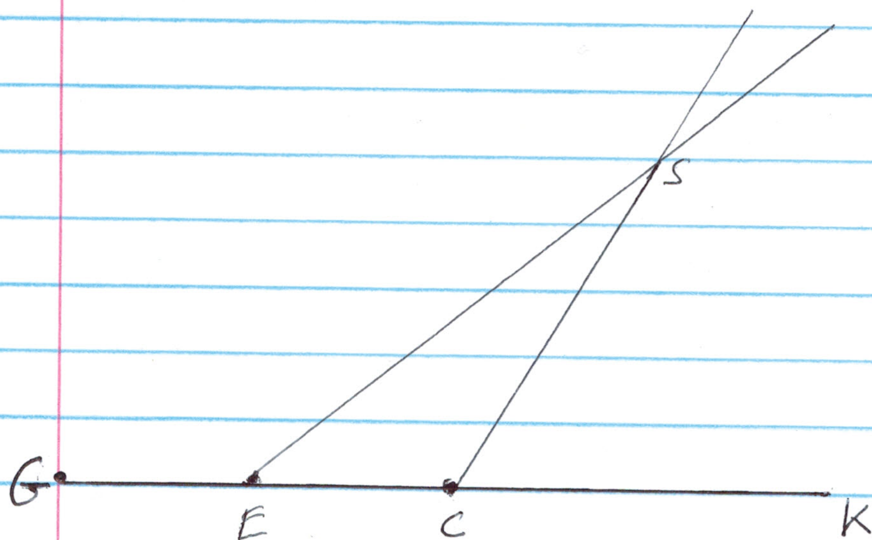

K 71'

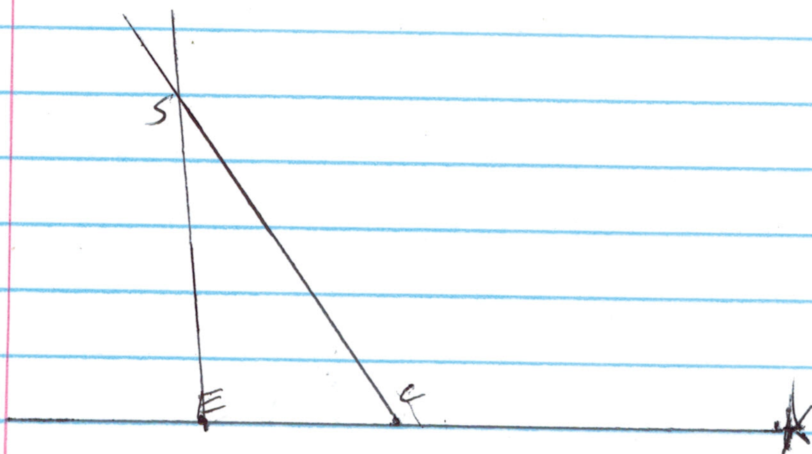
apogee.

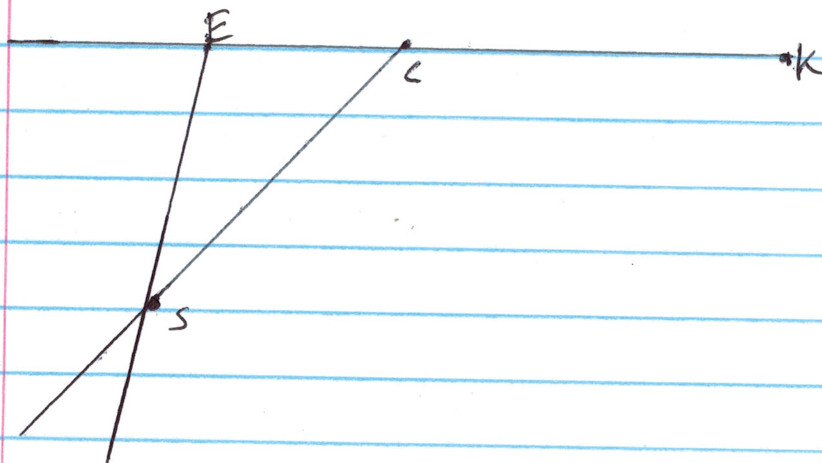


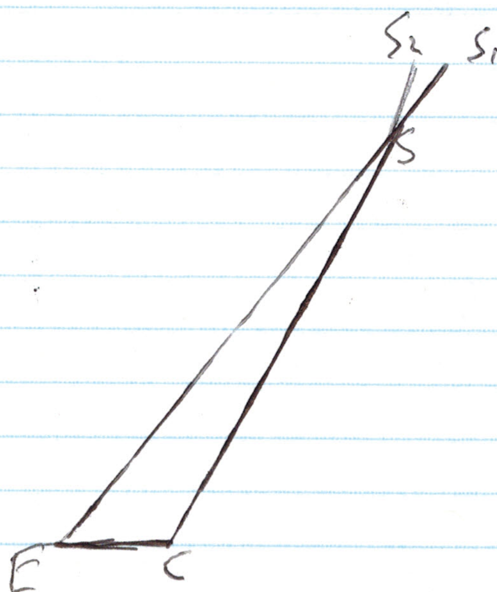

71°

Apose.


S
G
E
C
K


S
E
C
K

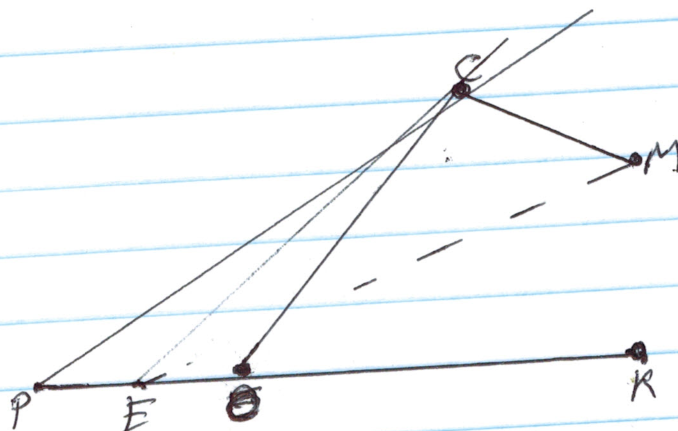

E
C
K
S

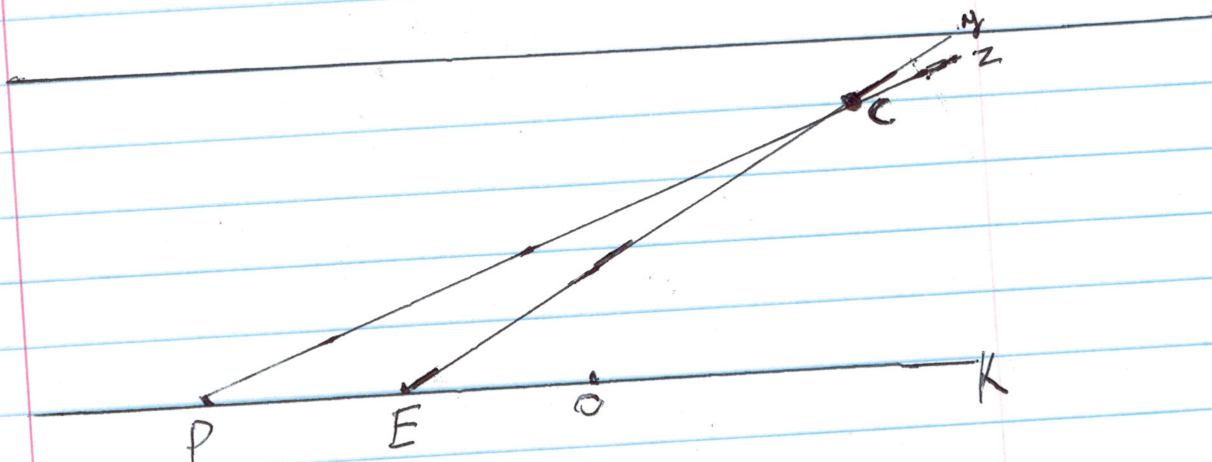


$S_2$
$S_1$
S
E
C

14-15

Figure 4



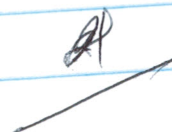
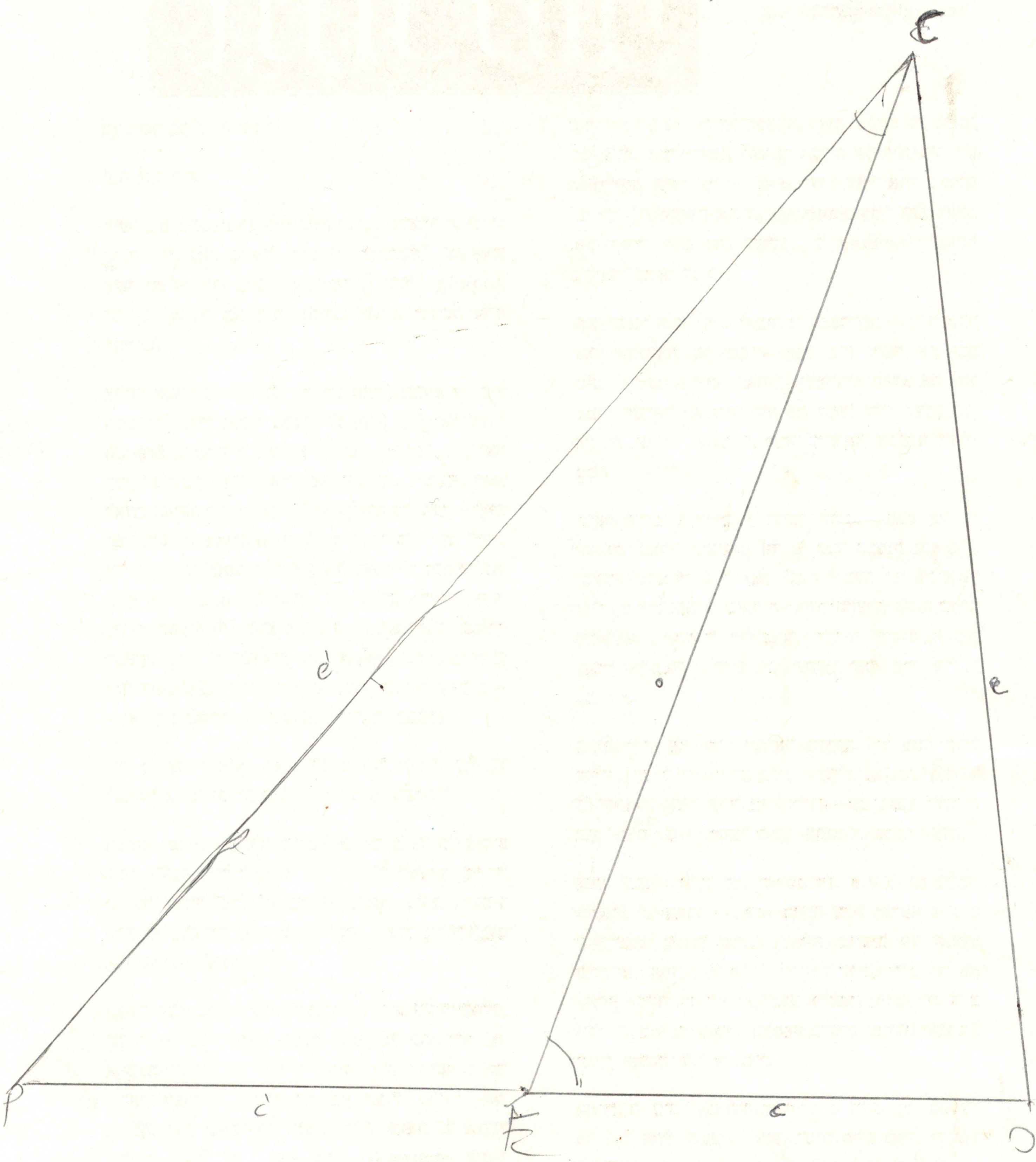
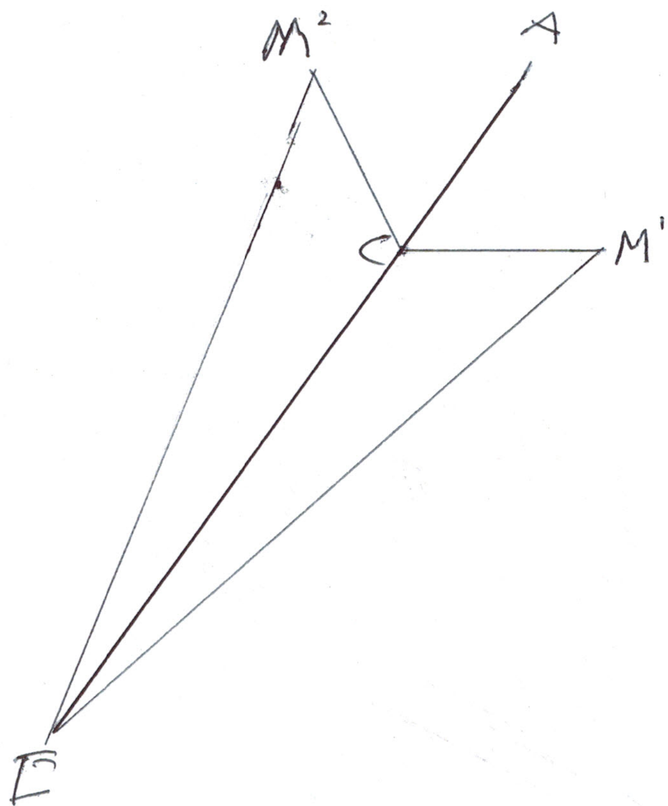



Figure 5



C
e
P
E




Note $M^1EC = M^2EC$

And so is $ACM' = ACM^2$

Also $ACM^2 = 360 - ACM'$

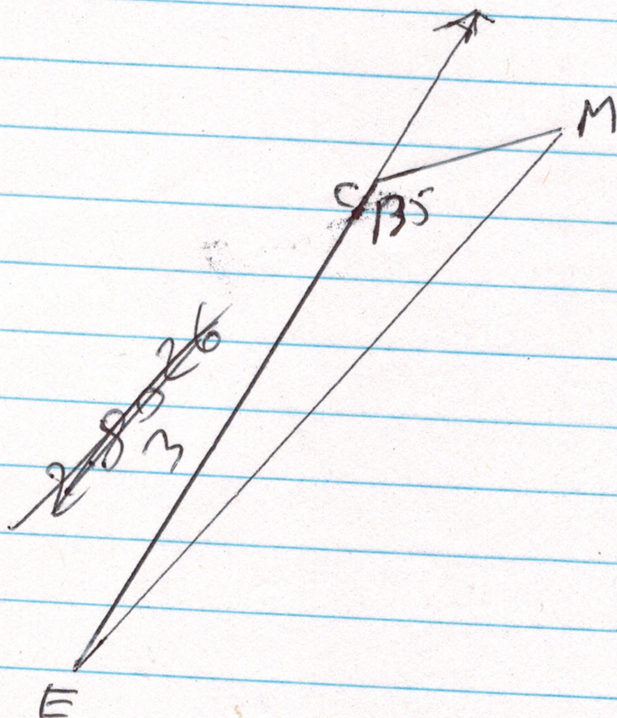



Figure 6

Now we will discuss BSD SHINUY MAREH. RMBM 17 5-11

See picture 86 we see that an object is seen LOWER on the horizon if you are on the SURFACE of earth—as opposed to the CENTER of earth [c2 is where it "appears" to be to the sight—c1 is the "calculated" place] so let's say we calculated the position of the moon at a given time, and we know her place [measured by ecliptical coordinates [orech=longitude as measured from tleh=0 rochav=latitude as measured north or south of the ecliptic]] we must "lower" its appearance on the horizon by some degree, and that will in turn CHANGE the orech & rochav of the moon

To illustrate: take a regular globe and imagine that the "equator" is really the "ecliptic" and the international date line is 0^ [so tleh is at the point where the equator meets the IDL]

Now take a thumb tack and push it in the globe at 150 w and 15 n [in middle of the ocean] imagine this point is the zenith for someone, we understand that his "horizon ring" will meet the ecliptic ring, at 120e and 60w --also the ecliptic ring will be incline towards the horizon ring with a 75^ angle [do it, so you will understand!] now take

a thread and tie it underneath the thumbtack and make sure the thumbtack points to the ceiling, let the string fall loose. Imagine that the moon is REALLY at one point of the string [closer to the thumbtack] but is SEEN by US lower on the horizon [further from the thumbtack] this will CHANGE the longitude AND latitude on the “visible” moon

We start with picture 86 to find angle ecr. We must know ec and er also angle rec. then we use the “regular” sine formula [not spherical!] sin erc/ec = sin ecr/er. Now ec itself is dependent on MERCHAK KUFUL [see pic 89]

We know from before that eo=.17945 and oc=.82055

Now we use the law of sines [for planes] sin MERCHAK KUFUL [MK]/ oc =sin v /eo

Sin v= sin MK*eo/oc

Now that we have angle v, we solve for ec with the cosine formula:

ec [sqr]= eo [sqr]+ oc [sqr] – 2* eo *oc* cos [180-v-MK]

let’s do an example: say MK is 30 [that is the average sun is 15^ behind the average moon---see above]

solve for v=6.2777

now solve for ec= .971038

now we return to picture 86.

er =.016666 [this is given!]

so to find arc c1c2 [or angle u] we must know rec [that is whats the “zenith angle” of the moon [how much is it below the zenith according to CALCULATION] let’s say 80

[the moon is only 10^ above the horizon] we want to know what is its “parallax” [angle u or arc c1c2]

Use the cosine formula to find rc

rc [sqr]= re[sqr]+ec[sqr]-2[re][ec] cos 80

rc= .968283

now use sine formula to find angle u

sin u/.0166666= sin 80 / .968283

u=.971273 [that is LESS than a full degree!]

the lower the moon REALLY is, the MORE the angle u is [you can see it from pic 86] for practical purposes we use u=.985 [because we take the moon when it’s even

lower—actually when it is on the horizon itself---although this is not accurate, this is the number the CHAZON ISH uses [according to the RMB]

now we start a new subject: how does this SHINUY MAREH [parallax] have an effect on the orech and rochav of the moon. i.e. if you are given a pair of long. And lat. Of the moon, and you are told that the moon APPEARS 10^ lower on the horizon [a wild exaggeration] what will be its “new pairs” of long lat?

Take again the celestial sphere, also see pic 204. Set it up that tleh just finished setting, and shor is on the horizon. You can set it up for a place like NY of UK [that the NCP is 40-50 above the horizon]

Now it’s very important to understand that now our focus is only on the ECLIPTIC [NOT on the NCP and CE] so make sure to have a “ecliptical pole” [that pole is simply the point that is 23.5 below the NCP and on the longitude that’s called 270^ [ you must do it to understand “why”]  so we are focused on the ecliptical coordinates and the horizon.

See pic. 204 “equator” is the “ecliptic”! Z’ is the zenith of someone standing on c . P is the ecliptical pole [EP] We can draw a 180^ arc starting at some point on the horizon, passing the EP or just P, the continuing to the zenith Z’ then to the ecliptic, finally reaching the horizon [in pic. 204 this is the half top of the circle]

Now if we assume that shor is on the horizon, [s] M is the REAL moon [as calculated] M’ is the “seen moon” assuming we know M [for example we know that the moon is 40^ after the sun [or 70^] [or that sm=40] also we know the ROCHAV [assume we know Mm is 25^]---now we would like to find the “new set” of coordinates, that are M’m’ and sm’

To find PZ’ note that this is the same as angle s [or the inclination of the ecliptic towards the horizon] from before we have [pic 17] angle C. we solve it thru

sin C/sin c= sin B/ sin b we know from before, that c=35.2055 so sin C=sin B sin c/sin b

we must choose for C 102.1 [not 77.9] [see it for yourself on the celestial sphere] however the complement [that is angle s, or PZ’] is 77.9

take a look at pic 204. In triangle PZ'M we know side PZ' [77.9] we know angle H [if sm is 40 as discussed before, then H must be 50] we know side PM = 65 [because we assumed that the ROCHAV is 25—see above]

lets solve for angle M

we can use cos a= cos b cos c+sin c sin b cos A

and find a [call PZ'=b Z'M=a and PM=c]

so you can write

cos Z'M=cos 77.9*cos 65 + sin 77.9*sin 65*cos 50

Z'M= 48.836548

Now we do the sine formula

sin M/ sin 77.9 = sin 50/ sin 48.836548

M=84.2336

Finally we solve fully for triangle PMM'

Note that angle PMM' is the complement of 84.2336 that is 95.7664

Lets use: cos a= cos b cos c+sin c sin b cos A

Where PM=b MM'=c and PM'=a

Also remember that MM' was 10 [by exaggeration—see above]

Cos PM'= cos 65 cos 10+sin 65 sin 10 cos 95.7664

PM'=66.3977227 [a very tiny difference in rochav it changed from 25 to 23.602277 [90-PM']

Now find the change in orech [that is mm' or angle MPM'] we can use the sine formula

Sin MPM'/ sin 10 = sin 95.7664/ sin 66.3977227

MPM'=10.867685 [that is a BIG difference] so the orech of the moon is not anymore at 70, rather it is at 59.1323

Next comes Maagal Yareach. That means once you found the new set of long and lat of the moon, we would like to know what part of the ecliptic shares the same right ascension like the long and lat of the moon

See picture 23. We have a celestial sphere with a celestial equator and galgal mazolos [ecliptic] remember NO HORIZON HERE! Now we have an object [say the

moon..] on point M. T is tleh [where the ecliptic meets the CE] the proper long and lat of the moon is TB and BM say TB=43^ and BM=30^    also we know that NCP [north celestial pole] is 23.5^ from EP [ecliptic pole]

We would like to know what point in the ecliptic that  has the same right ascension like point M [or draw an arc from NCP cutting through M then through the ecliptic [at point A] until it reaches the CE at point W] so we would like to find arc AB [that is called MAAGAL HAYAREACH] we understand the since M is not ON the ecliptic [rather 30^ above] its right ascension is shared by point A [that is: point A and point M have the same right ascension [in this picture W]

Now that we understand **what** we are looking for, lets do the math. [WHY we are interested in this, is a different question, we will discuss this later]

In triangle ENM we know side EN=23.5 side EM=60 [90-MB] angle E is 47 [90-43] [if you have a hard time understanding this, please use an actual celestial globe]

Use cos a= cos b cos c+sin c sin b cos A

And write cos NM=cos 23.5 cos 60+sin 23.5 sin 60 cos 47

NM=46.05

Now solve for angle M thru sine formula

Sin M/ sin 23.5 = sin 47/sin 46.05

M=23.8954

Now we can solve for triangle MAB

We will use

cot a sin b = cot A sin C + cos b cos C [see spherical laws for a proof]

now write: cot AB sin BM = cot M sin 90 + cos BM cos 90

[BM is b . AB is a. and AM is c]

Cot AB sin 30 = cot 23.8954

AB=12.49 so we know that 30.5094 [43-12.49]

of the ecliptic, has the same right ascension like 43 long and 30 lat [point M]

this deduction is called 17:10 NELIZAS MAAGAL YAREACH

now, stars that have the same right ascension, SET AT THE SAME TIME [right? No. wrong! Only true for people living ON THE EQUATOR] so once we know that point

30.5094 long, 0 lat has the same RA as 43 long, 30 lat--- if we are told that the sun is at 25 [that is 25 long 0 lat because the sun is always ON the ecliptic] so we can use our old formula to know how long it takes for the ecliptic to set from 25-30.5094, then we will assume that this is ALSO the amount of time it takes for the point [43,30] to set [since they have the same RA] THEN we will corrcect MENUS HAMEDINAH [that is the fact that since EY is on lat 32, we must take in consideration not ONLY the RA, but ALSO the DEC of a certain star, and we know that the difference in declination, DOES MATTER!

First we will do the math **without** menus medinah.

Sin a=sin 23.5 sin 30.5094/sin 58     a=13.5974

Tan w=cos 23.5 tan 30.5094     w=28.386448

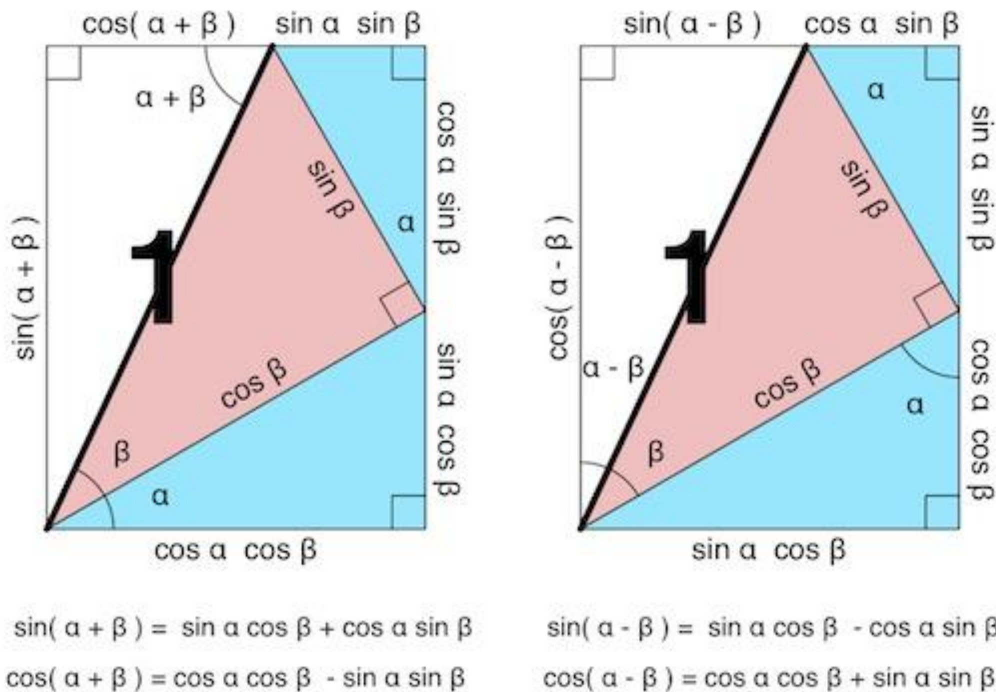
Cos[c-w]= cos a cos w /cos 30.5094        [c-w]=7.0116

So c=35.398        now redo for 25

You will get a=11.46174, w=23.1531 [c-w]=6.1326

So c=29.28572      now subtract. The second c from the first c, you will get 6.112325 [that is 24.45 minutes]

This is the time it takes for the ecliptic from point 25-30.5094 to set. But really we are dealing with point 43,30 and since EY is at 32 lat, so we know that even though point 30.5094,0 and point 43,30 share the same RA, they do NOT set the same time in EY [on the equator they DO!] for this come the correction of MENUS MEDINAH




See picture 204 we will now calculate shinuy mareh

That is orech and rochav shenie. We must know beforehand the inclination of the ecliptic towards the horizon, in the diagram this is arc PZ' [P is the pole of the ecliptic, and Z' is zenith] [see orech revii how to figure that out] also we have M as the real position of the moon with H as the angle past the prime meridian [the great circle that goes thru the ecliptic pole and the zenith] or 90-H is the orech rishon [ because the sun S is on the horizon, and we have the moon M, 90-H degrees moved

from the sun---the seforim say that the calculation of the rambam is when it is app. 15^ away, so H=75^]

Also we know Mm that is rochav rishon [it can be at most 5^] we need to find M'm' [rochav shenie] and H' [that is H+ delta H ], 90- H' is orech shenie. MM' is the shinuy mareh [the amount in degrees that the moon moves down on the horizon, due to parallax] also z'=z+MM'

see formula sheet [formula 4]

we will use this formula for both triangles PZ'M and PZ'M'

$\cos PZ' \cos A = \sin PZ' \cot z - \sin A \cot H$ also

$\cos PZ' \cos A = \sin PZ' \cot z' - \sin A \cot H'$

note that the two [top and bottom] on the right side are equal

so you can rearrange as

$\sin PZ' \cot z - \sin PZ' \cot z' = \sin A \cot H - \sin A \cot H'$

or $\sin PZ' [\cot z - \cot z'] = \sin A [\cot H - \cot H']$

now we can rewrite $[\cot H - \cot H']$ as

$[\cos H / \sin H] - [\cos H' / \sin H']$

Now make a common denominator [sin H sin H’]

And the numerator is cos H sin H’ – sin H cos H’

Now take this numerator and rewrite it [both the sin H’ and the cos H’] in the “sine/cosine addition form” [for example sin H’= sin H cos dH+ sin dH+ cos H] and you will end up with a simple delta H as the numerator! [it’s amazing!]

So we have now sin PZ’ sin MM’ / sin z sin z’ =

sin A sin dH / sin H sin H’

we know that sin MM’ = .0171972 sin z’ [this is the parallax formula for the moon, .0171972 [call it r] is the ratio of the radius of earth, to the distance of the moon when merchak kuful is 31^ see chazon ish seif 37—z’ is the zenith angle, when z’=90 [the moon is seen on the horizon] this formula is simply sin MM’= r and we find MM’= .985375553 this is the maximum parallax angle]

so rewrite: sin PZ’ r / sin z = sin A sin dH / sin H sin H’

multiply both sides by sin z ,and remember the sine formula: sin A sin z= sin H cos Mm

now rewrite the left: sin dH cos Mm / sin H’  [the sin H gets canceled] finally we have

$$r \sin PZ' = \cos [Mm] \sin \delta H / \sin H'$$

get the reciprocal then multiply both sides by cos Mm

$$\sin H' / \sin dH = \cos Mm / r \sin PZ'$$

now write sin H’ as the sine addition formula and divide thru by sin dH, you will get [ sin H cot dH + cos H]

this should be now on the left

subtract cos H then divide by sin H [both sides], finally you shall get

$$\cot dH = \{[\cos Mm / r\sin PZ'] - \cos H\} / \sin H$$

reciprocal is: $\tan dH = \sin H / \{[\cos Mm / r\sin PZ'] - \cos H\}$

do some simplification and you shall get on the right

$$r \sin H \sin PZ' / \cos Mm - r \cos H \sin PZ'$$

so finally we can find dH that is the shinuy orech if we have: PZ’ [נטיית המילקה]  H = 75 , Mm can be upto 5^

lets  take an example: when the sun is on the horizon, and its on 15^  and the moon is on 30 ^ and rochav hayareach is 5^

first we find PZ' the steps are:

$\sin a = \sin 23.5 * \sin 15 / \sin 58$

$\tan w = \tan 15 \cos 23.5$

$\cos [c-w] = \cos a \cos w / \cos 15$

$\sin C = \sin c \sin 58 / \sin 15$

you shall get C=80.59 [that is נטיית המילקה and also PZ']

now we will find

$\tan dH = r \sin 75 \sin 80.59 / [\cos 5 - r \cos 75 \sin 80.59]$

dH=.9466186 [or 56 chlakim and 48 shniyos]

[p.s. this does not match with RMB –we will see soon a more simplified formula]

The simplified formula is

$\tan dH = r \sin 80.59$ [we assume that cos 5=1, and cos 75=0 and sin 75=1]

Now r= sin MM' [MM' is a small angle less that 1^ see above MM'= .985375553 ] so we can simplify again

Sin dH= sin MM' sin 80.59 [because dH is small, cos dH is close to one] now write sin dH/ sin MM' = sin 80.59

Or dH/MM'=sin 80.59 [small angles the ratio of the angles and the sine of the angles are very similar]

dH=MM' sin 80.59 = 58 chlakim

according to this formula, we simply take the sine of נטיית המילקה [because MM' is close to one] and that is the shinuy orech

now we shall calculate shinuy rochav BSD

take a look again at 204 we need to find PM' [we know PM—that is the 90-rochav rishon]

lets call PZ'=netiyas milkeh "n"

first we use formula A and write:

cos PM= cos z cos n + sin z sin n cos Z' also

$\cos PM' = \cos z' \cos n + \sin z' \sin n \cos Z'$

you can write $\cos Z' = [\cos PM - \cos z \cos n]/[\sin z \sin n]$

also $\cos Z' = [\cos PM' - \cos z' \cos n]/[\sin z' \sin n]$

so both right sides are equal so you can eliminate $\cos Z'$

and just write down [by cross multiplication]

$\sin z' [\cos PM - \cos z \cos n] = \sin z [\cos PM' - \cos z' \cos n]$

multiply out both sides, then rearrange as

$\sin z' \cos PM - \sin z \cos PM' =$

$\cos z \cos n \sin z' - \cos z' \cos n \sin z$

the last line can be rewritten [using the sine subtraction formula see beginning of page] as

$\cos n \sin p$

finally $\sin p = .0171972 \sin z'$ [as before]

so we have

$\sin z' \cos PM - \sin z \cos PM' = \cos n \; .0171972 \sin z'$

divide through by $\sin z'$ then transpose and get

$\cos PM' [\sin z / \sin z'] = \cos PM - \cos n \; .0172$ ***

not finished! We can use formula C to write another two formulas

sin PM cos H = cos z sin n – sin z cos n cos Z’ also

sin PM’ cos H’ = cos z’ sin n – sin z’ cos n cos Z’

follow the steps of before until you get

sin PM cos H sin z’ – cos PM’ cos H’ sin z =

sin n .0171972 sin z’

divide both sides by sin z’ then transpose and get ****

sin PM’ cos H’ [sin z/ sin z’] = cos PM cos H – .0172 sin n

divide ***/**** and get finally

cot PM’ / cos H’ = [1/ tan PM’ cos H’]=

[sin PM - .0172 cos n] / [cos PM cos H -.0172 sin n]

Or tan PM’=

[sin PM cos H -.0172 sin n]/ [[cos PM - .0172 cos n] [cos H’]]

As you can see, since we know from before the value of H’ [shinuy orech] also we know n [netiyas hamilkeh]

PM is also known [90-rochav rishon] we can solve for PM' [and the rochav shene will be 90- PM']

Lets give an example for shinuy rochav

We continue with the example above

Tan PM' = [sin 85 cos 75 -.0172 sin 80.95]/

{[cos 85-.0172 cos 80.59]cos 75.9466186}

Finally solve for PM'=85.139484 [use a TI multiview calculator and it will take you a minute..]

The shinuy rochav is 8.369 chalakim

We can use a very simple shortcut for both shinuy orech and rochav

See d 44 M is the real place of the moon on the western horizon. M' is the place it is visible [about one degree lower—due to parallax]

This diagram is for a person looking at the lower western horizon---facing the western horizon, south is on his left, and north on his right. Since we are dealing with a very small triangle, we can consider it as a plane triangle.

Angle abM is the angle that we call “netiyas hamilkeh” [Mb is the “line” we draw that represents the ecliptic---galgal hamazolos] this angle is given [see previous section how to calculate it] now we must find shinuy orech that is Mc and shinuy rochav that is M’c [note that M’c is perpendicular to the ecliptic and it is south of the ecliptic]

Angle M=90-angle b [angle b is known]

Cos M= Mc/MM’ or sin b=Mc/MM’

Mc=sin b MM’

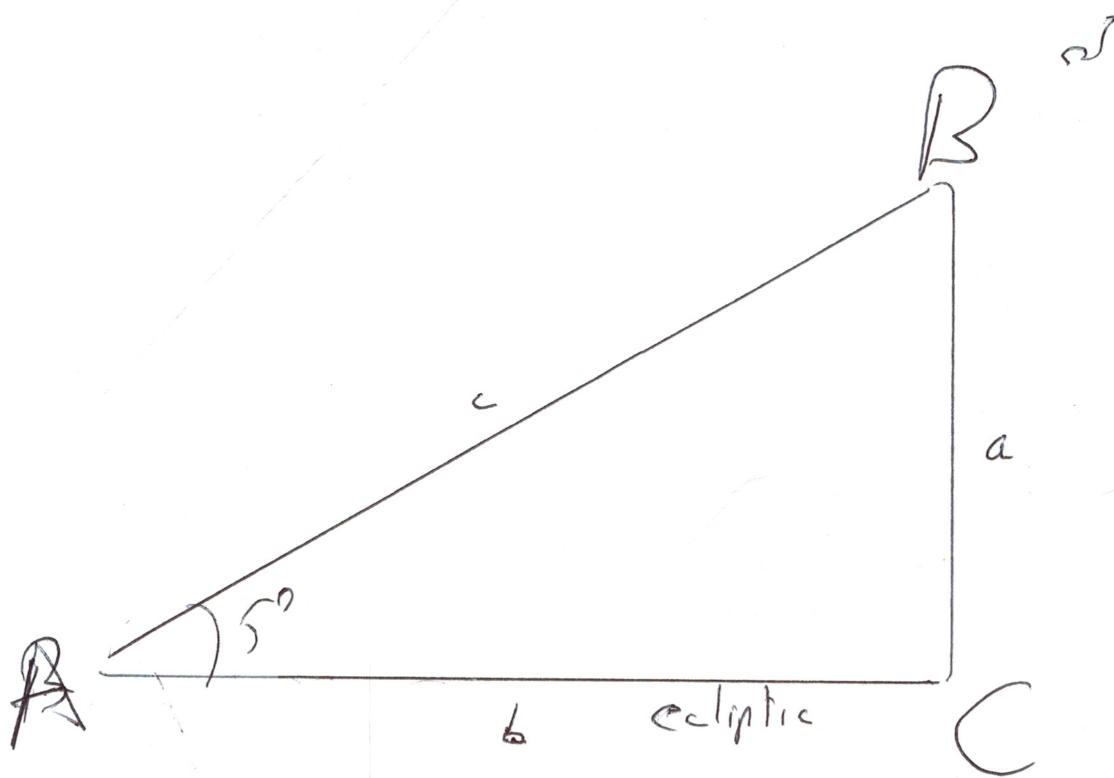
And similarly M’c=cos b MM’

MM’ is about 1 degree [.985]

Note that this diagram is when the moon is ON the ecliptic

If the moon is on O [that is 5^ south of the ecliptic] we will see it on O’ note that again fO’ will be shinuy rochav and fO shinuy orech and we can use the same formula as above---it doesn’t matter that the moon is not ON the ecliptic---we still have the same “displacements”

[self understood this only holds true with the “approximation method”]

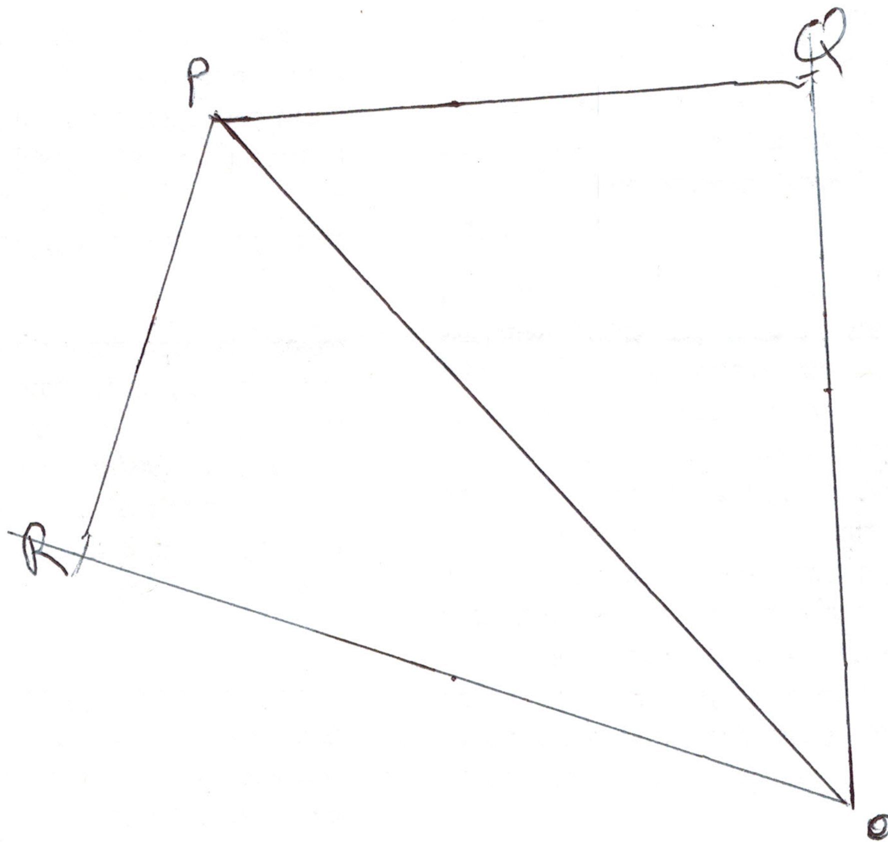



$\overline{AC}$ = Maslul Yareach

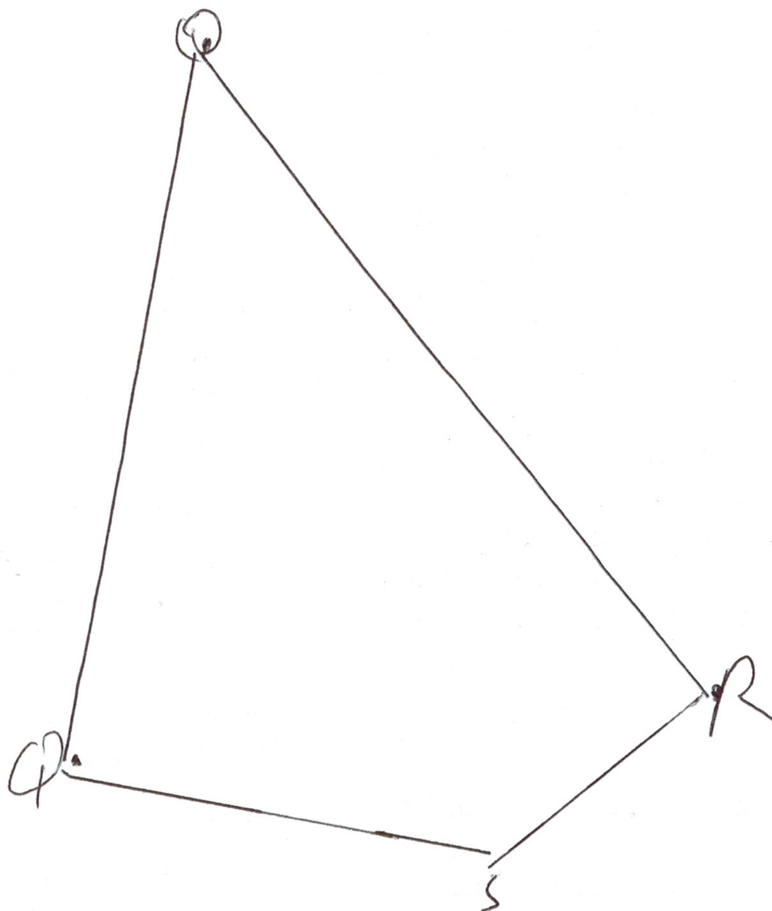
A = node

[the fast way is to say that $\overline{AB}$ is Maslul Yareach]

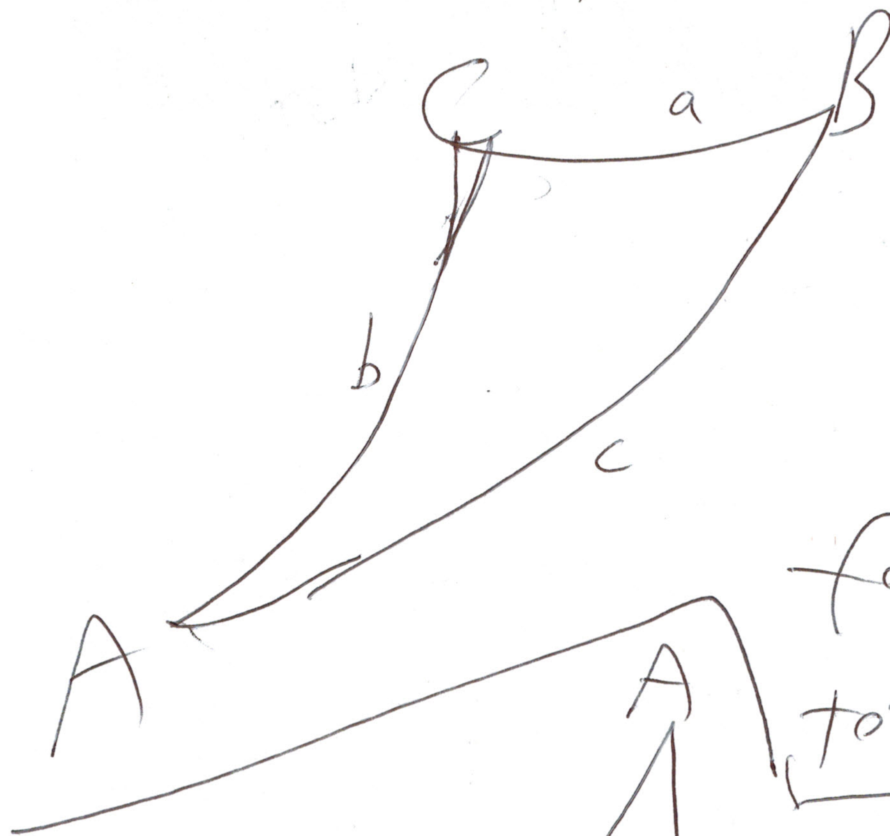
figure 9



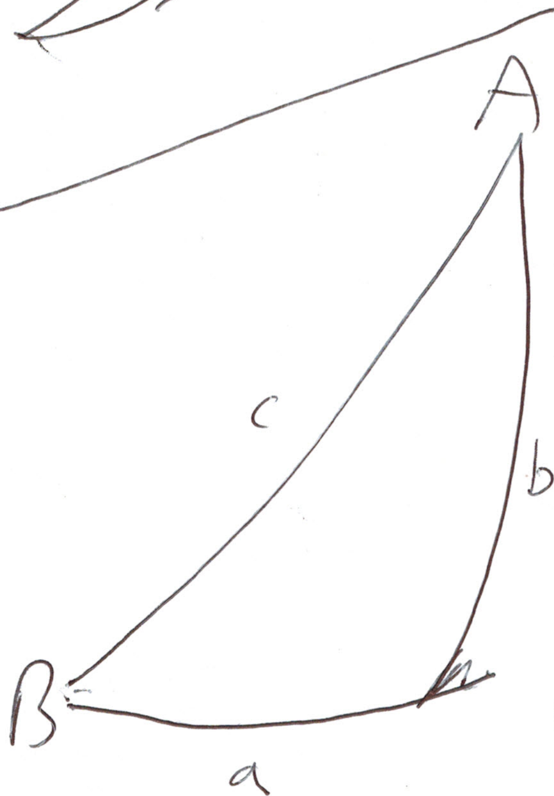

~~Figure~~ 8 Figure


R
S

17




sketch for ה16 totally set



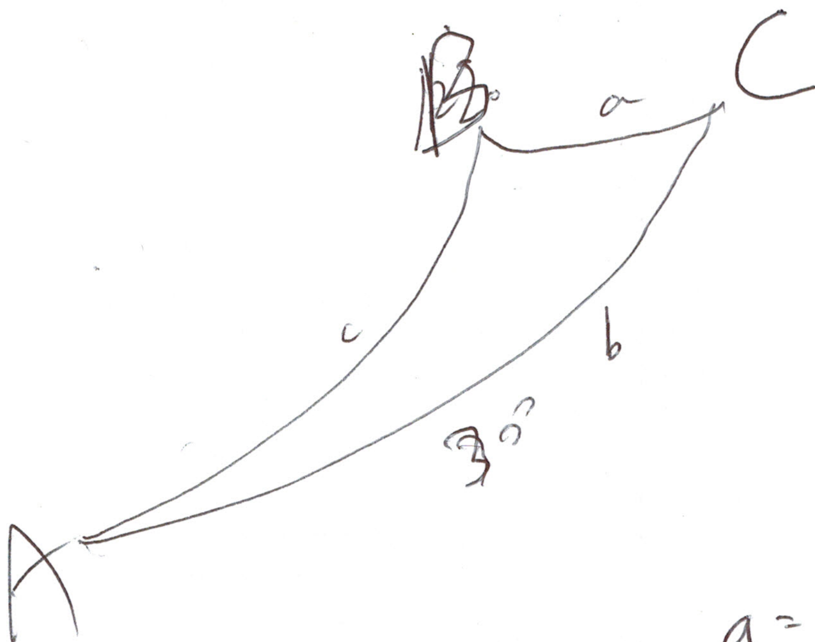

A = 23.5
B = 58

sketch for D agin totally rised! and is about to set

a = horizon
b = galgal Mazales
c = celestial equator

18 ת"ז ספר

sketch
ציור




a = horizon

b = galgal Mazalos

~~c = galgal Mazalos~~

c = celestial equator

A = 23.5

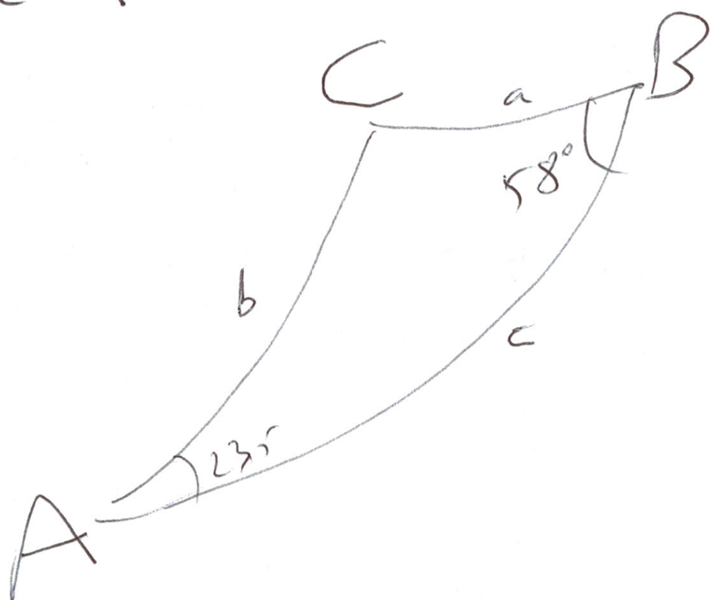
B = 122

$$\sin a = \sin 23.5 \, \sin b / \sin B$$

$$\tan W = \tan b \, \cos A$$

---

$$\cos(c - W) = \cos a \, \cos W / \cos b$$



1080 miles. Thus the moon's radius is about one-quarter that of the earth. The value of $S_0$ is $15' 32''\cdot 6$. The semi-diameters of the sun and planets are defined in a similar manner.

**120.** *Parallax in right ascension and declination.*

We now investigate the effect of parallax on the right ascension and declination of the moon with respect to an observer at $O$. We shall develop rigorous formulae which are only necessary in the case of the moon and artificial satellites, for which $P$ can be very large indeed. For the sun and other bodies in the solar system the parallax is a small angle, and consequently the general formulae can be greatly modified and simplified in this case.

Fig. 83.

Consider, in Fig. 83, the celestial sphere centred at $C$ (the earth's centre); $P$ is the north pole, $Z'$ is the observer's geocentric zenith and $PZ' = 90° - \phi'$. Let $M$ be the position of the body on the celestial sphere as viewed from $C$; then $Z'M = z$. Produce the great circle arc $Z'M$ to $M'$ so that $Z'M' = z'$, $z'$ being the zenith distance of $M$ with respect to the observer at $O$. Then, since $z' = z + p$, we have $MM' = p$, the angle of parallax corresponding to the observation made at $O$. Let

Now we will discuss maagal hayareach. See d 23--we have a celestial sphere ncp [n] is the north celestial pole. Ep [e] is the ecliptic pole. M is a celestial object. T is tleh point. Ce is the celestial equator, and finally we have the galgal hamazolos. Note we are NOT dealing with any particular latitude, we are rather dealing with the celestial sphere ITSELF.

Suppose we know bm [that is the ecliptic latitude of object m] and we also know angle e [note that e represents 90 minus the ecliptic longitude, so if tb=40 [that is 10^ in mazal shor] then angle e is 50, if you don't understand this, use a celestial sphere] also we know en=23.5, now we would like to find ab. This is called maagal hayareach.

The moon is at point m, we MUST translate this point into a point ON the ECLIPTIC ITSELF that both of these points SHARE the SAME RIGHT ASCENSION. [because then we can say: since we know how long it takes for a certain point on the ecliptic to set, [that is orech revii] this point will approx. take the same, [because they have the same ra--we will fix the tiny problem by rochav hamdinah]

So we have all the ingredients to find ab, [then we will deduct ab from tb, and we call this arc [ta] "orech shlishi"]

Lets assume bm=25 [note that this is impossible for the moon [it can not be more than 5^]]
tb=40----so e must be 50 [90-40]-----en is 23.5
Now write sin ab/ sin m =sin am/ sin b [formula B]
Or sin ab= sin m sin am [note that sin b=1] *
Now we will use formula C
That is: sin a cos B =cos b sin c-sin b cos A cos c
We will call the right angle B, A [so we can eliminate the whole thing, because cos 90=0]
We have sin am cos m =cos ab sin bm [ we called am “a” ab “b” and bm “c”]
Rewrite as cos ab= sin am cos m / sin bm **

Now divide */**
Write sin ab/cos ab = tan m sin bm or
Tan ab= tan m sin bm ***

Now we try to rewrite “tan m”

See formula D cot a sin b= cot A sin C + cos b cos C
Call M “A” ---- E “C”-----N “B”
Now write
Cot 23.5 sin 65 = cot M sin 50 + cos 65 cos 50
Or with letters
Cot en sin em = cot M sin E + cos em cos E
Cot M= [cot en sin em-cos em cos E] / sin E
Tan M= sin E/ [cot en sin em-cos em cos E]

Finally we have for ***
Tan ab = [sin bm sin E] / [cot en sin em-cos em cos E]

Lets solve our original problem

Tan ab= sin 25 sin 50 / [cot 23.5 sin 65-cos 65 cos 50]
ab=10.126

To make matters very easy and simple, we can assume that sin em =1      cos em =0
Then we have simply
Tan ab= sin bm sin E / cot 23.5
Tan ab= sin bm cos [galgal] tan 23.5
Tan ab=sin ab/cos ab that is tan ab is almost the same as sin ab [since cos ab is very close to one], furthermore,
In small angles the sines are in proportion to the angles
Example: sin 2^ = .400426 sin 5^
Also 2^ = .4 (5^) [we will not prove it here]
So we can finally get the real shortcut of the RMBM
ab= bm cos [galgal] .4348
In RMB language: maagal hayareach= rochav shene times cos makom hayareach times .4348
Now we will express this: orech shlishi= orech shene-maagal yareach
This formula will work for ALL cases. See d 35 this diagram has four cases: tb=40^ and bm=5 bm’=-5

So  we have orech shene-[-5*cos 40*.4348] this will ADD some to orech shene [as you see in the diagram that a’ is FURTHER on the ecliptic]
Now imagine that b is 180-40=140 [you can view point b as being on the “other” side of the paper--and point t is also moznayim [180^]] then if m is positive, a will be FURTHER on the ecliptic, if m’ is negative, a’ is BEHIND on the ecliptic. This fits very well with the above expression: orech shene-[5*cos 140 * .4348] will ADD to orech shene, then again orech shene-[-5*cos 140 * .4348] will subtract from orech shene

Now see d 34 here we have also four cases: 320,+5 ---320, -5----220,+5----220,-5
Again we can use the above formula and it will always return the right answer

A slight different version [of the short way] as follows

Start with angle m
Tan M= sin E/ [cot en sin em-cos em cos E]
Since em is close to 90, and cos 90=0, also sin 90=1
 we can rewrite
Tan M= sin E/ cot en   or simply
Tan M= cos [galgal] * tan 23.5
Now since abm is a small triangle we can treat it as a plane triangle where b is 90^ and side bm=rochav

So we can express tan M=ab/bm
but tan M=cos galgal*.4348
So write ab/bm=cos galgal*.4348     and
ab=rochav*cos galgal*.4348
Now orech shlishi=orech shene-ab [as above]

Now let's say you want to find ab when b=320 [that is 20 in mazal deli]
See d 34
We have the moon [m] 5^ rochav tsefoni [bm=5]
angle ep=130 [90+40]  and epncp=23.5
We need to find arc ab [that is maagal hayareach--because that point in the galgal hamazolos,has the same ra as the moon
Note that angle m  remains the same in all diagrams. Also m’ remains the same
The general formula [formula A] holds true for ALL kinds of triangles [even though one or two side are greater than 90]
Please see attached, to prove this
רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק יז

ואחר כך תחזור ותקח מן הרוחב השני הזה מקצתו, מפני שהירח נלוז מעט במעגלו, וכמה הוא המקצת שתקח ממנו? אם יהיה מקום הירח מתחלת מזל טלה עד עשרים מעלה ממנו, או מתחלת מזל מאזנים עד עשרים מעלה ממנו, תקח מן הרוחב השני שני חמשיו,

ואם יהיה הירח מעשרים ממזל טלה עד עשר מעלות ממזל שור או מעשרים ממזל מאזנים עד עשר מעלות ממזל עקרב תקח מן הרוחב השני שלישיתו,

ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל שור עד עשרים ממנו או מעשר מעלות ממזל עקרב עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביעיתו,

ואם יהיה הירח מעשרים מעלות ממזל שור עד סופו או מעשרים ממזל עקרב עד סופו תקח מן הרוחב השני חמישיתו,

ואם יהיה הירח מתחלת מזל תאומים עד עשר מעלות ממנו או מתחלת מזל קשת עד עשר מעלות ממנו תקח מן הרוחב השני שתותו,

ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל תאומים ועד עשרים ממנו או מעשר ממזל קשת עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני חצי שתותו,

ואם יהיה מקום הירח מעשרים ממזל תאומים עד חמש ועשרים ממנו או מעשרים ממזל קשת עד חמש ועשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביע שתותו,

ואם יהיה מקום הירח מחמש ועשרים ממזל תאומים עד חמש מעלות ממזל סרטן או מחמש ועשרים ממזל קשת עד חמש מעלות ממזל גדי לא תקח כלום, לפי שאין כאן נליזת מעגל,

ואם יהיה הירח מחמש ממזל סרטן עד עשר ממנו או מחמש ממזל גדי עד עשר ממנו תקח מן הרוחב השני רביע שתותו.

ואם יהיה מקום הירח מעשר ממזל סרטן עד עשרים ממנו או מעשר ממזל גדי עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני חצי שתותו,

ואם יהיה מקום הירח מעשרים ממזל סרטן עד סופו או מעשרים ממזל גדי עד סופו תקח מן הרוחב השני שתותו, ואם יהיה הירח מתחלת מזל אריה עד עשר מעלות ממנו או מתחלת מזל דלי עד עשר מעלות ממנו תקח מן הרוחב השני חמישיתו,

ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל אריה עד עשרים ממנו או מעשר ממזל דלי עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביעיתו,

ואם יהיה הירח מעשרים ממזל אריה עד עשר ממזל בתולה או מעשרים ממזל דלי עד עשר ממזל דגים תקח מן הרוחב השני שלישיתו,

ואם יהיה הירח מעשר ממזל בתולה עד סופו או מעשר ממזל דגים עד סופו תקח מן הרוחב השני שני חמשיו, וזאת המקצת שתקח מן הרוחב השני היא הנקראת מעגל הירח.

ואחר כך תחזור ותתבונן ברוחב הירח ותראה אם הוא צפוני או דרומי, אם היה צפוני תגרע מעגל הירח הזה מן האורך השני, ואם היה רוחב הירח דרומי תוסיף המעגל הזה על האורך השני,

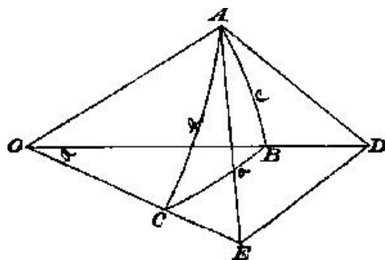
במה דברים אמורים? בשהיה מקום הירח מתחלת מזל גדי עד סוף מזל תאומים, אבל אם היה הירח מתחלת מזל סרטן עד סוף מזל קשת יהיה הדרך הפך, שאם יהיה רוחב הירח צפוני תוסיף המעגל על האורך השני, ואם היה רוחב הירח דרומי תגרע המעגל מן האורך השני, ומה שיהיה האורך השני אחר שתוסיף עליו או תגרע ממנו הוא הנקרא אורך שלישי, ודע שאם לא יהיה שם נליזת מעגל ולא נתן החשבון לקחת מן הרוחב השני כלום, יהיה האורך השני עצמו הוא האורך השלישי בלא פחות ובלא יתר.

s

# IV

# Relations between the Trigonometrical Functions of the Sides and the Angles of a Spherical Triangle.

**37.** *To express the cosine of an angle of a triangle in terms of sines and cosines of the sides.*




Let $ABC$ be a spherical triangle, $O$ the centre of the sphere. Let the tangent at $A$ to the arc $AC$ meet $OC$ produced at $E$, and let the tangent at $A$ to the arc $AB$ meet $OB$ produced at $D$; join $ED$. Thus the angle $EAD$ is the angle $A$ of the spherical triangle, and the angle $EOD$ measures the side $a$.

From the triangles $ADE$ and $ODE$ we have

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos A,$$
$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos a;$$

also the angles $OAD$ and $OAE$ are right angles, so that $OD^2 = OA^2 + AD^2$ and $OE^2 = OA^2 + AE^2$. Hence by subtraction we have

$$0 = 2OA^2 + 2AD \cdot AE \cos A - 2OD \cdot OE \cos a;$$

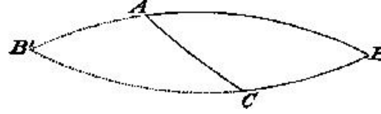
therefore $$\cos a = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE} \cdot \frac{AD}{OD} \cos A;$$

that is $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Therefore $$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

**38.** We have supposed, in the construction of the preceding Article, that the sides which contain the angle $A$ are less than quadrants, for we have assumed that the tangents at $A$ meet $OB$ and $OC$ respectively produced. We must now shew that the formulæ obtained is true when these sides are not less than quadrants. This we shall do by special examination of the cases in which one side or each side is greater than a quadrant or equal to a quadrant.

(1) Suppose only one of the sides which contain the angle $A$ to be greater than a quadrant, for example, $AB$. Produce $BA$ and $BC$ to meet at $B'$; and put $AB' = c'$, $CB' = a'$.



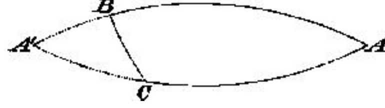

Then we have from the triangle $AB'C$, by what has been already proved,

$$\cos a' = \cos b \cos c' + \sin b \sin c' \cos B'AC;$$

but $a' = \pi - a$, $c' = \pi - c$, $B'AC = \pi - A$; thus

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

(2) Suppose both the sides which contain the angle $A$ to be greater than quadrants. Produce $AB$ and $AC$ to meet at $A'$; put $A'B = c', A'C = b'$; then from the triangle $A'BC$, as before,

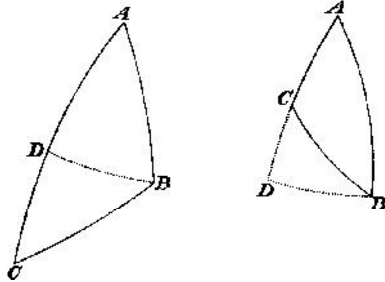



$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A';$$

but $b' = \pi - b$, $c' = \pi - c$, $A' = A$; thus

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

(3) Suppose that one of the sides which contain the angle $A$ is a quadrant, for example, $AB$; on $AC$, produced if necessary, take $AD$ equal to a quadrant




and draw $BD$. If $BD$ is a quadrant $B$ is a pole of $AC$ (Art. 11); in this case $a = \dfrac{\pi}{2}$ and $A = \dfrac{\pi}{2}$ as well as $c = \dfrac{\pi}{2}$. Thus the formula to be verified reduces to the identity $0 = 0$. If $BD$ be not a quadrant, the triangle $BDC$ gives

$$\cos a = \cos CD \cos BD + \sin CD \sin BD \cos CDB,$$

and $$\cos CDB = 0, \quad \cos CD = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b, \quad \cos BD = \cos A;$$

thus $$\cos a = \sin b \cos A;$$

and this is what the formula in Art. 37 becomes when $c = \dfrac{\pi}{2}$.

(4) Suppose that both the sides which contain the angle $A$ are quadrants. The formula then becomes $\cos a = \cos A$; and this is obviously true, for $A$ is now the pole of $BC$, and thus $A = a$.

See d 47 [top] we must find find c [that is the part of the CE that sets while b [the given arc of the mazolos] set
Let's draw a line from NCP perpendicular to CE, that meets the point where the horizon meets the mazolos
Call that arc yz
Also divide side c into arc xz+arc zw
First we find a thru sin formula

sin a/ sin 23.5 = sin b/ sin 58 or
Sin a= sin 23.5 sin b/ sin 58 [we can solve for a]

Now we find the line drawn perpendicular to the CE that meets the point where the horizon meets the mazolos [see diagram] called yz

We use the sin formula: sin b / sin 90= sin yz/ sin 23.5
Or sin yz =sin b sin 23.5 [we solve for yz]

Now we will use the simple cosine formula well known. where angle C is a right one, it simplifies to cos c =cos a cos b

So we can write here cos a = cos yz cos zw or
Cos zw= cos a/ cos yz [we solve for zw]

Also cos b= cos xc cos yz or
Cos xz=cos b/ cos yz [we solve for xz]

Finally we add together xz+zw=c [that is the final result of the CE that sets while b maalos of the mazolos set, in EY]

this is used from 0 until 180 only!

We can do this with a calculator in four steps

1) Asin [.39875 sin b/ sin 58] this is a
2) Asin [.39875 sin b] this is yz
3) Acos [cos a / cos yz] this is zw
4) Acos [cos b/cos yz] this is xc

Now c=xc+zw

Asin is the inverse sin key [it has a sin -1 On it]

.39875 is sin 23.5

We can also find "netiyas hamilkeh" that is the angle that the ecliptic makes with the horizon [or 180-C in the diagram] lets use the sin formula

sin C/sin c = sin 58/ sin b or

Sin C = sin c sin 58 / sin b [we solve for C]

C = netiyas hamilkeh

[the calculator returns 180-C, because each ASIN, has two solutions, x and 180-x, and the calculator returns only the 180-x, so you just find C and you have the answer]
[note: you can not solve this for b=0---but you can insert b=1 and get the result---the netiyas hamilkeh for b=0 is simply 58+23.5 [use celestial globe to understand this]

Lets redo for the ecliptic setting from 180-360 [see bottom d page 47]

Again we draw a line from NCP perpendicular to CE and continuing till it reaches the point where the mazolos meet the horizon [see d] we need to find c

So we will first find cwz the we will DEDUCT wz and we shall know c

As before we solve for a [note sin 58 and sin 122 are the same]

Arc zy is also the same and so is wz

Now side cwz we can find thru the cosine formula
Cos b=cos zy cos cwz or
Cos cwz= cos b/cos zy
Now we DEDUCT wz from cwz to find just c
In other words we do the SAME operations as before

Just instead of ADDING wz [to xc] we subtract!
Then again we find netiyas hamilkeh
The same as before sin C= sin c sin 58/ sin b
180-C= netiyas hamilkeh


01/06/2021


01/06/2021

23a

קו
מזלות

Z

EP

M

אופק

M'    B    A

C

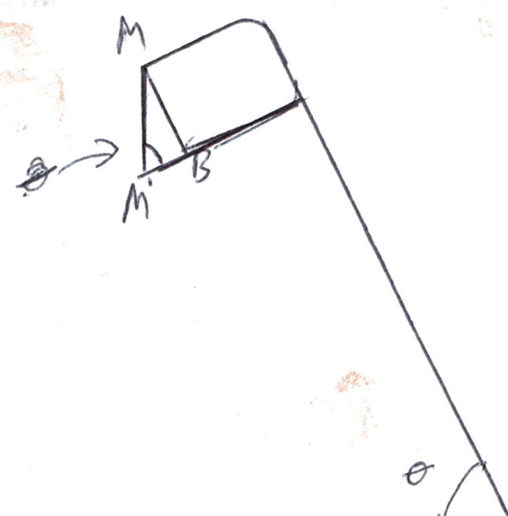
L

23b

ש הל'
הרמב"ם

שי'

מרכזה



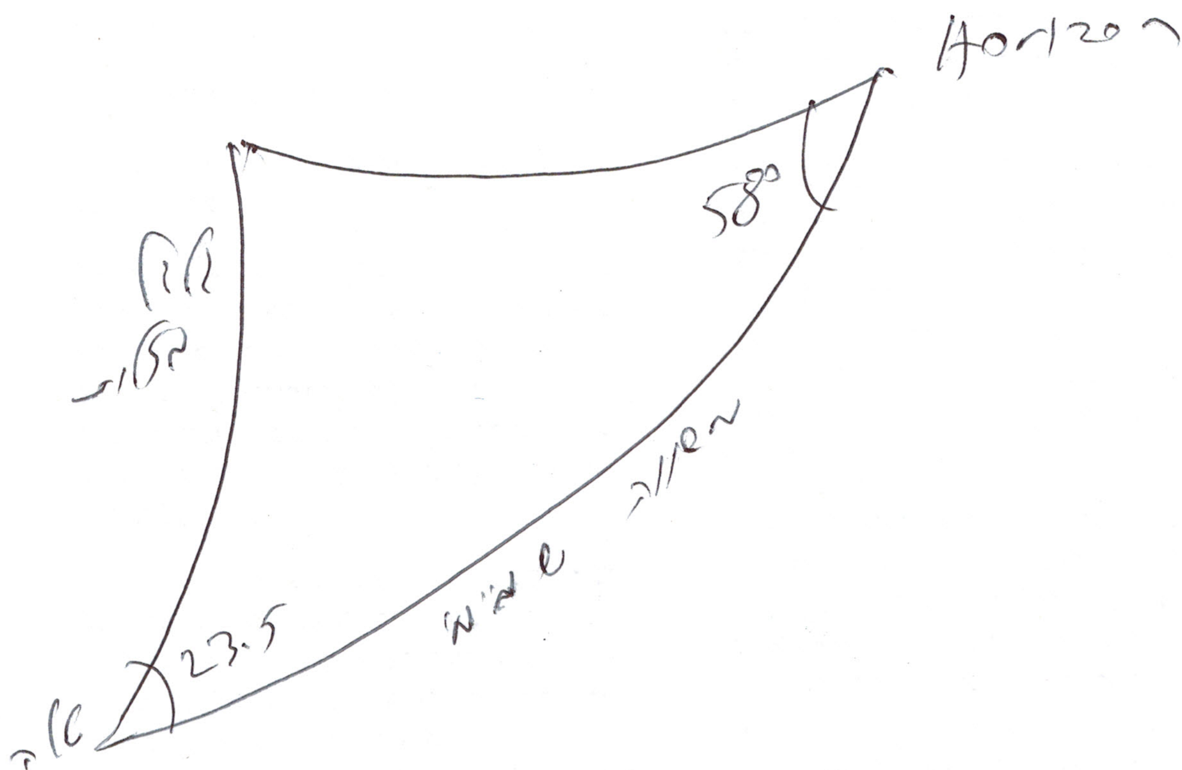

$\sin \phi = \frac{MB}{MM'}$

$\cos \phi = \frac{M'B}{MM'}$

דרום ←

→ צפון

ל

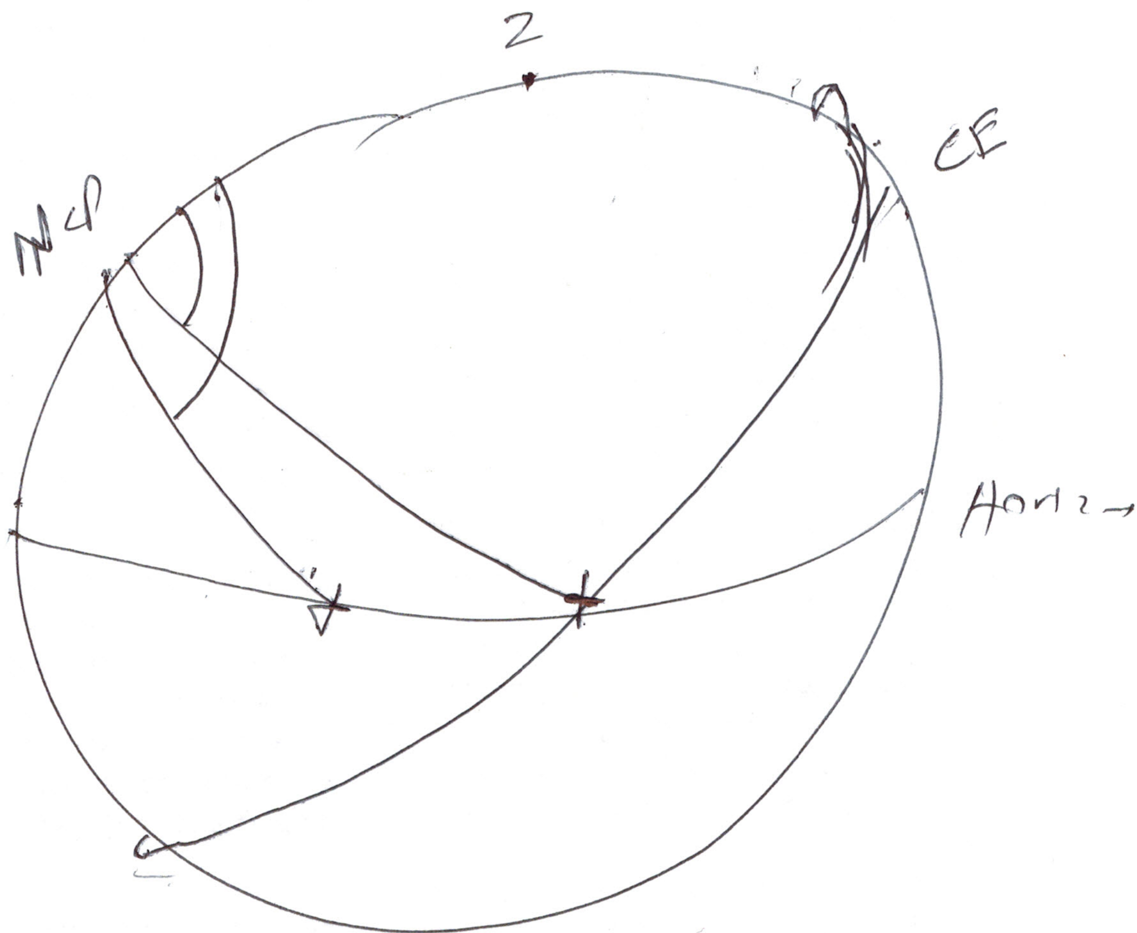



אורך

רגע

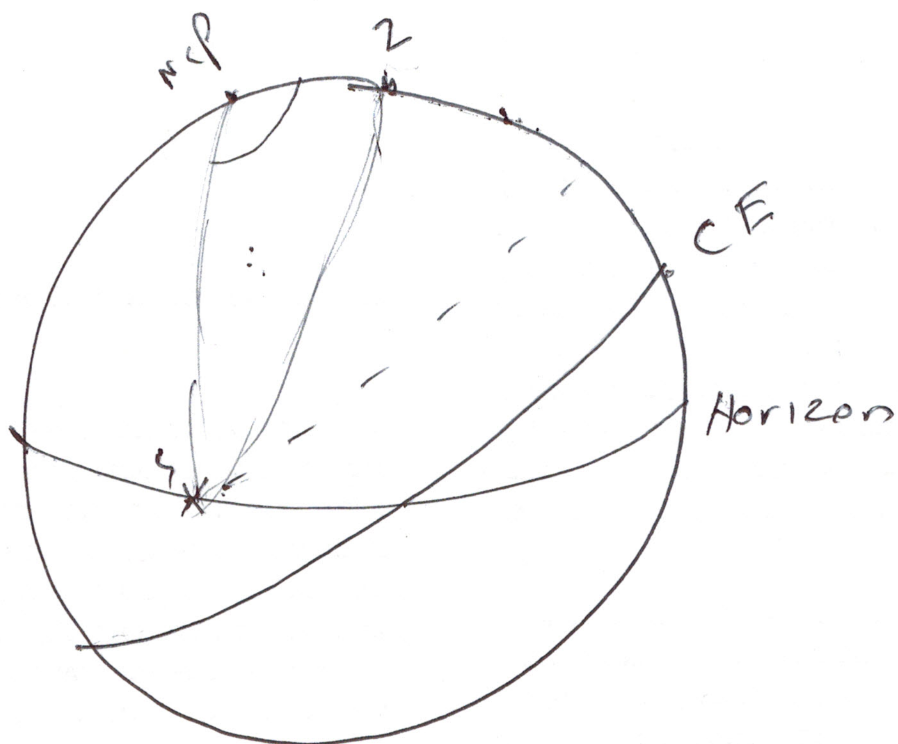
[illegible] 25

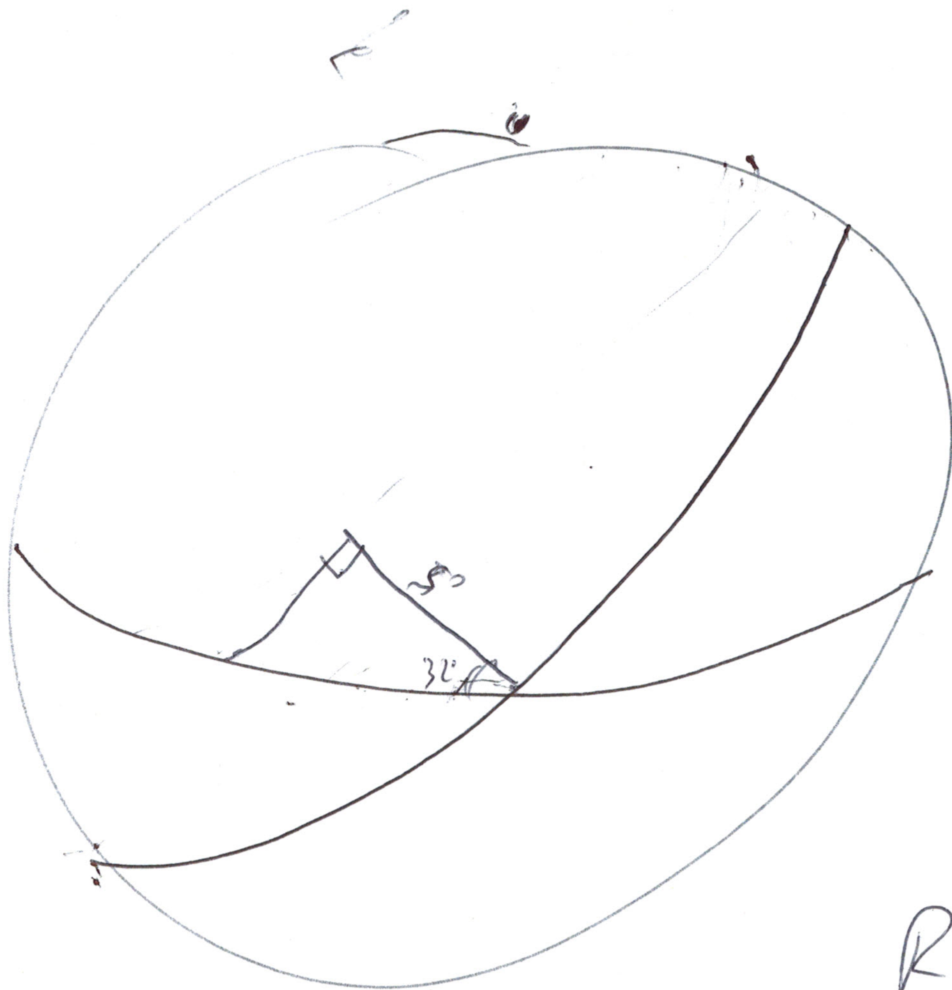
[illegible]




$\cos A = -\tan 32 \tan \delta$

25



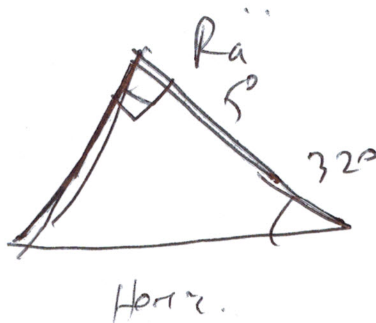



Rambams

appl

for

מולד → מקום
שפל ז'

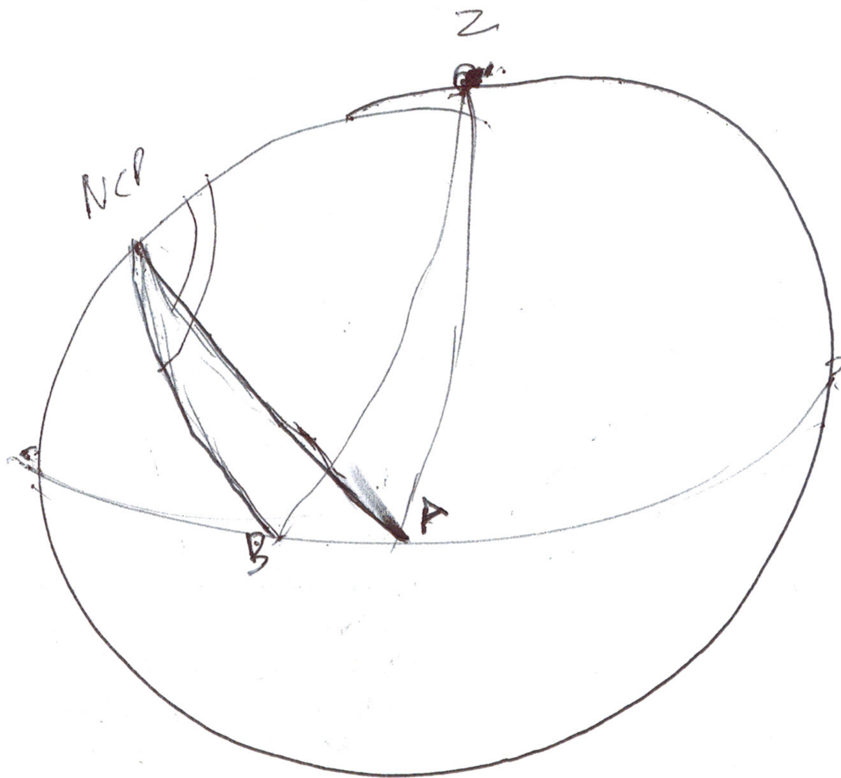



$\tan 32° = \frac{5}{?}$

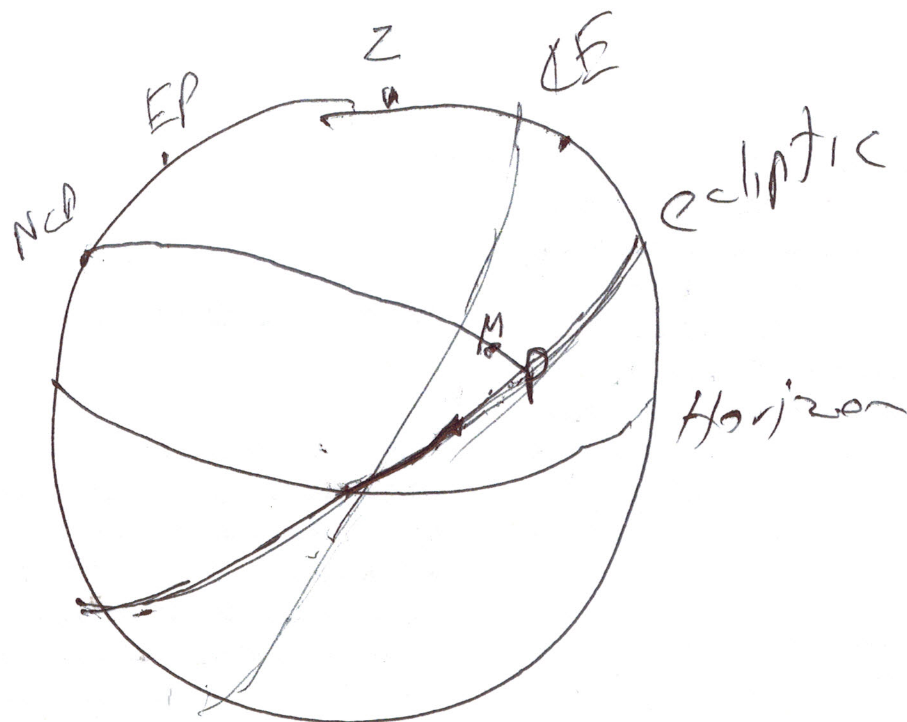
$\cos A = -\tan 32 \tan \delta$

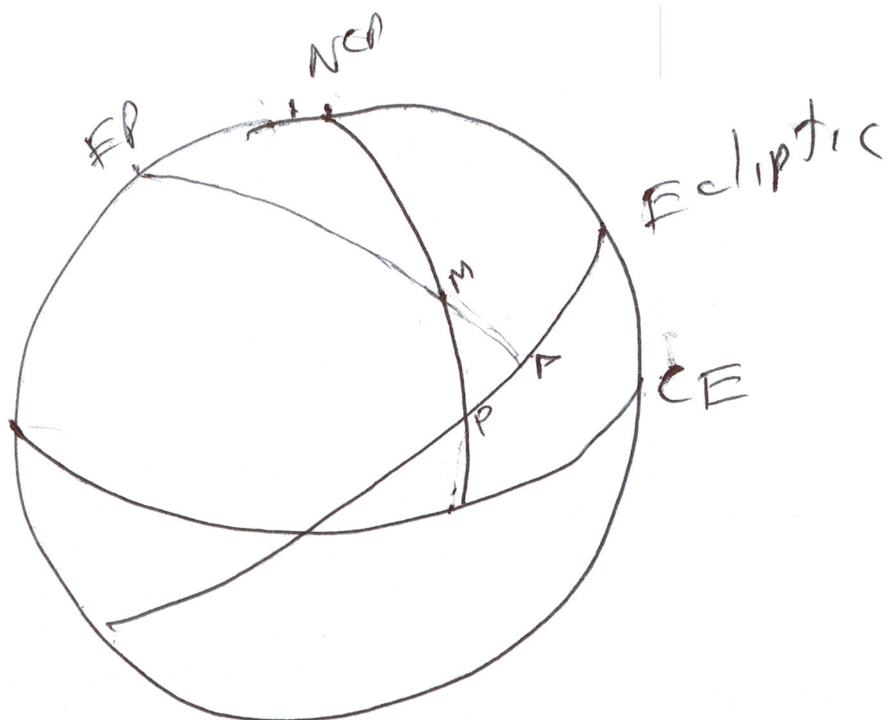
| | | |
|---|---|---|
| 107 | .3403 | 25.5 |
| 106 | .5451 | 24.5 |
| 105 | .7655 | 23.5 |
| 105 | | 22.5 |
| 104 | .2494 | 21.5 |
| 103 | .5108 | 20.5 |
| 102 | .7841 | 19.5 |
| 102 | .0683 | 18.5 |
| 101 | .3628 | 17.5 |
| 100 | .6666 | 16.5 |

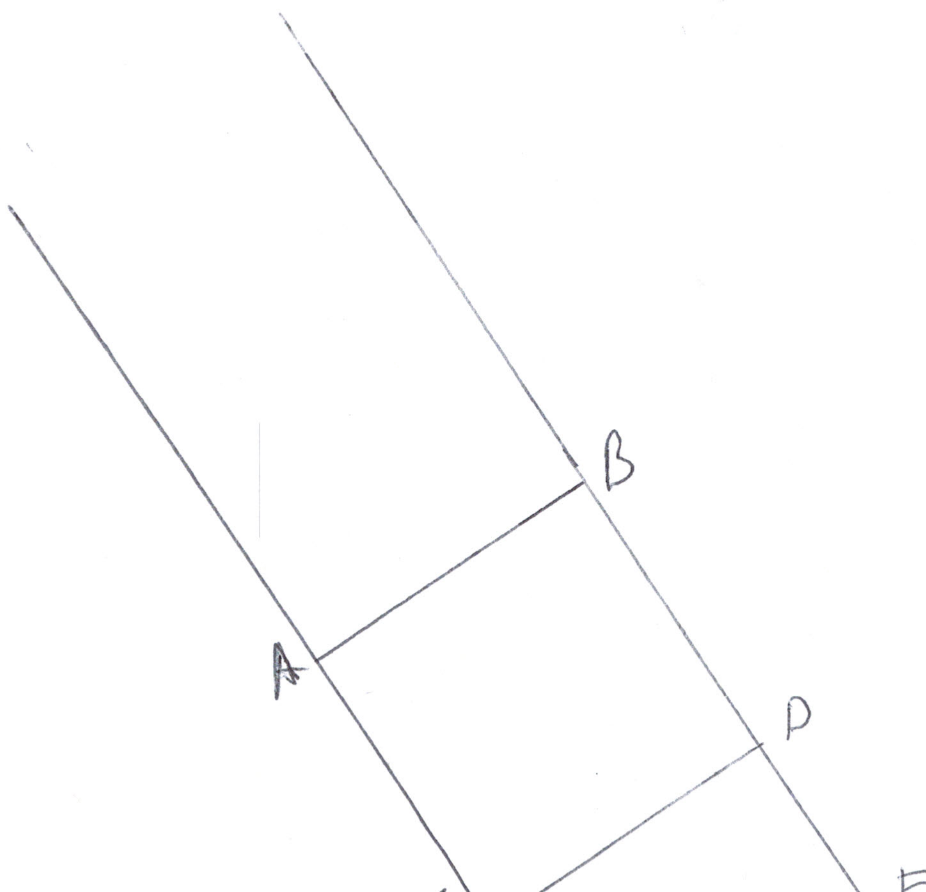
26



27



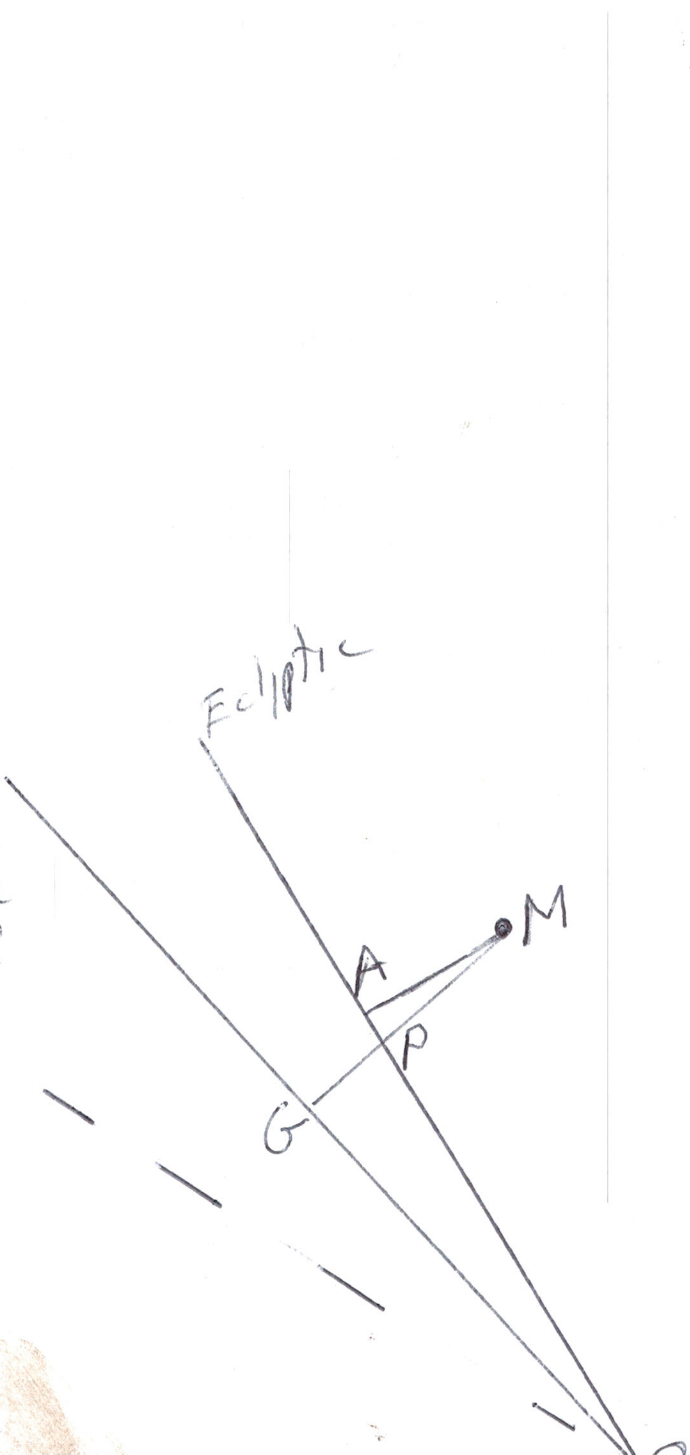

NCP
EP
Ecliptic
M
A
P
CE




S

N

30




S

N

Menus govah hamedinah

We all know that the day is longer on summer. This is due to the fact that the sun has a northern declination [see d. 25] imagine you live in Siberia where arc NCP-Z =30^ [the latitude of the city is 60^ north] also the sun is 20^ north. How do you know the length of that day?

We draw a spherical triangle S-Z-NCP we need to find the angle NCP [that is the same as the dotted line which is the path of the sun on that day from Chatsos till Shkiah---but that is NOT a "great circle" so we can NOT use that, because spherical trig only gives solution for triangles that are created thru "great circles"]

We are given: NCP-S =80^ [because we said the sun has a northern Dec of 20^

NCP-Z=30 [b/c we live in Siberia]  Z-S= 90^ [b/c we have the sun ON the horizon---90^ from Zenith] we will use formula A.

[Use a celestial sphere if you need help understanding what's going on]

$\text{Cos } a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

Lets call zs=a ncpz=b ncps=c

$\text{Cos } 90 = \cos 30 \cos 80 + \sin 30 \sin 80 \cos NCP$

$0 = \cos 30 \cos 80 + \sin 30 \sin 80 \cos ncp$

$\text{Cos } ncp = - \cos 80 \cos 30 / \sin 80 \sin 30 = - \sin 20 \sin 60 / \cos 20 \cos 60 =$

$-\tan 20 * \tan 60$

Or $\cos ncp = - \tan dec * \tan lat$

Ncp= 129.0807426 [that is 516.3229 minutes instead of 360 minutes – from chatsos till shekiah]

So if we know the latitude of the city and the dec of the sun, we can find, the time it takes from chatsos to shkiah

Now we return to the RBM, here there is a person in lat 32 [EY] now suppose you have star A that has RA of 30,  and DEC of 22, also you have star B with SAME RA [30] but DEC of 25 [instead of 22]—and you know that star A will set in, say,  27 minutes, is there a fast way to find out how much longer/shorter will star B set?

So the “exact” way to do it is simply to use the above formula

Acos [ -tan 22 tan 32] – acos [-tan 25 tan 32]  [since they have the exact same RA, so they pass the “chatsos line”  the same time—take a celestial globe to see why]

=2.31733 or 9.269 minutes after star A

Now, orech revii is the time it takes the moon to set HAD it been on the same RA that it REALLY is, however since the moon maybe upto 5^ above or below the ecliptic, this changes its DEC. see diagram 26. Star B has a greater dec [that is ncpb is less than ncpa] so the angle ncp is greater [that gives us the time from chatsos until shkiah]

Orech revii measures the time it takes for a certain point on the ecliptic to set---given the point of the ecliptic that is right now on the horizon. Now that special point is chosen such that it has the SAME RA that the moon has [this was done thru maagal hayareach] however we are still not OK, since the declinations are not the same . see diagram 27  [this is when moznayim is on the horizon in EY]

M is the moon, we have figured out how long it takes for P to set [that is orech shelishi [arc of ecliptic]—translated in minutes by orech revii [arc of ce]] but since M is somewhat above P, it has a greater DEC [note:  M and P have the same RA as you can see from the arc drawn from ncp thru m and p]

Now if we know arc that the moon is 5^ above the ecliptic, this does NOT mean that mp say is 5^  ! see  figure 28 M and P both share the same ra, however am is 5^ above the ecliptic, this is NOT the DEC! difference. The difference in DEC is pm---we can find pm easily. Ap is maagal hayareach. We have  a formula for that:

Cot ap= [cot am cot 23.5/sin ep]  -  cot ep  [see maagal hayareach]

Now  we use formula A

Cos pm=cos am co sap

We will give an example: am=5 ep=48 [the orech shenee is thus 42 and rochav shenee is 5] first we find maagal hayareach [ap] =1.6616

Now we find pm

5.2682

But the RMBM tries to simplify matters see d. 29

Let's assume line ce a c  is the line of the celestial equator in EY. You are facing the western horizon [the paper is like a "snap shot" of the lower western horizon—a very small space [angle wise]]   you can see n on the right [north] and s [south] on the left.  You are viewing the the western point, and you see the imaginary CE rising up from the horizon with a 58^ inclination [in EY that is 32 lat]

Now assume we have the sun [during summer] going on line bde, [that is a northern declination] we would like to know what is line de [that is how much degrees, or how much longer will it take for the sun to set, when it's travelling on line bde?] we know how to do it the "long way" [see d 26] now we will do it the "shortcut way"  we will NOT use spherical trig, rather we assume everything is on a plane. Angle dce is 32^ ,   line cd   is 5^  [since it's a small angle we can use plane trig] [note that ab share the SAME RA, and so does cd---they only differ in declination]

We use the simple formula tan 32=de/cd, or de= 5*tan 32 [tan 32=.625—see RMB

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק יז

ואחר כך תחזור אצל רוחב הירח הראשון ותקח ממנו שני שלישיו לעולם, וזה הוא הנקרא מנת גובה המדינה, ותתבונן ותראה אם יהיה רוחב הירח צפוני, תוסיף מנת גובה המדינה על האורך הרביעי, ואם יהיה רוחב הירח דרומי, תגרע מנת גובה המדינה מן האורך הרביעי, ומה שיהיה האורך הרביעי אחר שגורעין ממנו או מוסיפין עליו הוא הנקרא קשת הראייה.

So here are the simplifications made: we use the rochav hayreach as the “change in dec” instead of the real “change in dec” [or in d 28 we use am instead of pm---see also d 30, we use line am instead of pm—the “real change in dec”]

Also we assume that the change in dec is always the same [i.e. as long as you are dealing with the same RA, and they only differ in dec, we can say that say a star on the CE and one 5^ above, will differ [in time of setting] the same as one 5^ and one 10^---in reality let’s use formula on d 26 [cos A= -tan 32 tan dec] for dec of 5^ we get A=93.13386443. for dec 10, we get 96.32576833 the difference is 3.1919039 versus 3.13386443 [from 0 to 5][so we see that the higher you go, the more it makes difference]]

Lastly, we use plane trig to solve for the change.

To understand what we did from orech and rochv shenne till the final keshes reiyah, see d 30. M is the moon [already “fixed” with shinuy mareh] its rochav is am [note am is perpendicular to the scliptic] this is a rochav tsefoni. We now find which point in the ecliptic shares the same ra, so we draw mpg [all these points have the same RA] now po is called orech shlishi

רמב"ם הלכות קידוש החודש פרק יז

ואחר כך תחזור ותקח מן הרוחב השני הזה מקצתו, מפני שהירח נלוז מעט במעגלו, וכמה הוא המקצת שתקח ממנו, אם יהיה מקום הירח מתחלת מזל טלה עד עשרים מעלה ממנו, או מתחלת מזל מאזנים עד עשרים מעלה ממנו, תקח מן הרוחב השני שני חמשיו, ואם יהיה הירח מעשרים ממזל טלה עד עשר מעלות ממזל שור או מעשרים ממזל מאזנים עד עשר מעלות ממזל עקרב תקח מן הרוחב השני שלישיתו, ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל שור עד עשרים ממנו או מעשר מעלות ממזל עקרב עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביעיתו, ואם יהיה הירח מעשרים מעלות ממזל שור עד סופו או מעשרים ממזל עקרב עד סופו תקח מן הרוחב השני חמישיתו, ואם יהיה הירח מתחלת מזל תאומים עד עשר מעלות ממנו או מתחלת מזל קשת עד עשר מעלות ממנו תקח מן הרוחב השני שתותו, ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל תאומים ועד עשרים ממנו או מעשר ממזל קשת עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני חצי שתותו, ואם יהיה מקום הירח מעשרים ממזל תאומים עד חמש ועשרים ממנו או מעשרים ממזל קשת עד חמש ועשרים

ממנו תקח מן הרוחב השני רביע שתותו, ואם יהיה מקום הירח מחמש ועשרים ממזל תאומים עד חמש מעלות ממזל סרטן או מחמש ועשרים ממזל קשת עד חמש מעלות ממזל גדי לא תקח כלום, לפי שאין כאן נליזת מעגל, ואם יהיה הירח מחמש ממזל סרטן עד עשר ממנו או מחמש ממזל גדי עד עשר ממנו תקח מן הרוחב השני רביע שתותו. ואם יהיה מקום הירח מעשר ממזל סרטן עד עשרים ממנו או מעשר ממזל גדי עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני חצי שתותו, ואם יהיה מקום הירח מעשרים ממזל סרטן עד סופו או מעשרים ממזל גדי עד סופו תקח מן הרוחב השני שתותו, ואם יהיה הירח מתחלת מזל אריה עד עשר מעלות ממנו או מתחלת מזל דלי עד עשר מעלות ממנו תקח מן הרוחב השני חמישיתו, ואם יהיה הירח מעשר מעלות ממזל אריה עד עשרים ממנו או מעשר ממזל דלי עד עשרים ממנו תקח מן הרוחב השני רביעיתו, ואם יהיה הירח מעשרים ממזל אריה עד עשר ממזל בתולה או מעשרים ממזל דלי עד עשר ממזל דגים תקח מן הרוחב השני שלישיתו, ואם יהיה הירח מעשר ממזל בתולה עד סופו או מעשר ממזל דגים עד סופו תקח מן הרוחב השני שני חמשיו, וזאת המקצת שתקח מן הרוחב השני היא הנקראת מעגל הירח.

Ap is maagal hayareach . we see that the most that you can “take” is a two-fifths that is .4 this is done when the inclination of the ecliptic towards the horizon, is the maximum [when tleh is on the horizon, as in d 30] or minimum [dotted lines in d 30] when moznayim is on the horizon

Once we know orech shlishi [po] we can find easily orech rvii [that is the time it takes op to set, now this is not easy at all! But in the time of the RMBN there was a chart that, gave data for different location, how long it takes for parts of the ecliptic to set, so we are transalating the setting of the moon into the setting of po [that is “known”] and we use the arc of ecliptic that has the same RA of the moon]

How to get from orech shlishi to revii is explained at length earlier in the sefer. [we must use some heavy formulas for that]

Once we have orech revii, we must still add or subtract some, because the DEC of the moon is NOT exactly the same as the dec of point p [in d 30] we use the rochav as a approximation, then we give or take 2/3 this is called menus govah hamedinah [in ny this is .84, so when the sun moves 2^ above the CE the day gets

longer with app. 1.68 degrees or 6.72 minutes [really 13.44 minutes—we must add from both sides—sunrise till chatsos---chatsos to sunset]]

Finally we get keshes reiyah. The time it takes for the moon to set [say bde in d 29]

We will investigate BSD how to calculate the angle that the moon is “pointing”

See d 55 [bottom] you shall hold the paper in front of yourself and imagine you are gazing at the western horizon a day or two after rosh chodesh, about an hour or two after sunset, the moon is low on the western horizon and you are facing the western horizon with “north” on your right, and “south” on your left, the moon is a small crescent, now draw an imaginary line to connect the two “pointers” of the moon, then draw a line perpendicular to that line that goes all the way to the western horizon [see diagram] the angle that this line [or more accurate: great circle arc] forms with the horizon, is called לאן היה נוטה

See d 55 [top] this is a view from someone looking from OUTSIDE of the celestial sphere [if you have one, this will be a 2-d picture from it..]  we set it in a way that the ecliptic circle is seen half above the horizon, and S [that is the sun] is setting right now [it is ON the horizon] let's assume it is november 20  [that's when the ecliptic circle is quite low when the sun sets---use celestial sphere to understand why]   now we can calculate the angle the ecliptic makes with the horizon [that is angle C, discussed at length in “orech revii” also known as “netiyas hamilkeh”] how ever since the moon is at m [that is 5^ north of the ecliptic---greatly exaggerated on the diagram!] we must

find angle S and add that to angle C to find the TOTAL angle
An opposite example is the middle diagram on page 55, we have the moon SOUTH of the ecliptic, so we must SUBTRACT angle “moon-s-ecliptic”  to find angle “moon-s-south”

We will use formula D
cos a cos C=sin a cot b-sin C cot B
In the top picture, sm is c   ---------st is a ---------tm is b
Since C is a right angle [and cos 90=0] this formula reduces to: sin a cot b=cot B
Or sin st cot tm =cot S
Or tan S= tan tm/sin st
Now tm is known [that is the rochav amiti--remember to use negative when rochav deromi] st is orech shene [that is after correcting for shinuy mareh]  now we can easily find S  and add to  “netiyas milkeh” to find לאן היה נוטה

Example:  the sun is at 220 and is setting on the horizon, the moon is on 235 and has a rochav deromi of -5, what angle are the horns pointing?

First lets find netiyas hamilkeh : four step process
Sin a= .39875 sin b/ sin 58
Sin yz=.39875 sin b
Cos zw=cos a/cos yz

Cos xc=cos b/cos yz

Since b [the galgal] is more than 180, we use [220-180=40] and we SUBTRACT zw from xc

Small c is 28.040746  big C is 38.33187
Now the moon is 15^ after the sun [235-220] so we solve for tan S=tan -5/ sin 15            S=-19.757
Finally 38.33187-19.757=18.575 so you expect to see the horns of the moon almost straight! [see bottom diagram on page 55, and imagine the the horns even "straighter" and almost perpendicular to the horizon]

Now we calculate the last thing: how many degrees above the horizon will the moon be found?

See d 56 assume arc epz is known [as in previous example, netiyas hamilkeh is 38] epm is 85 [because the moon is 5^ north of the ecliptic] angle EP is known [90-15=75] we must find arc zm

We will use formula D
cos a cos C=sin a cot b-sin C cot B
Rewrite as cot B= [sin a cot b -cos a cos C]/ sin C
Call side epm b-------- call epz a ------call zm c
Now solve for B,
Then use formula sin c/ sin C = sin b/ sin B

Or sin c= sin C sin b/ sin B
Once you solve for c you got zm---90-zm= altitude of moon
Example cot B=[sin 38 cot 85-cos 38 cos 75] / sin 75

B will be returned as -81.1678, you must add 180, to find B
Then solve for c
76.85488
The altitude is 13.145119

1080 miles. Thus the moon's radius is about one-quarter that of the earth. The value of $S_0$ is $15' 32''\cdot 6$. The semi-diameters of the sun and planets are defined in a similar manner.

**120.** *Parallax in right ascension and declination.*

We now investigate the effect of parallax on the right ascension and declination of the moon with respect to an observer at $O$. We shall develop rigorous formulae which are only necessary in the case of the moon and artificial satellites, for which $P$ can be very large indeed. For the sun and other bodies in the solar system the parallax is a small angle, and consequently the general formulae can be greatly modified and simplified in this case.

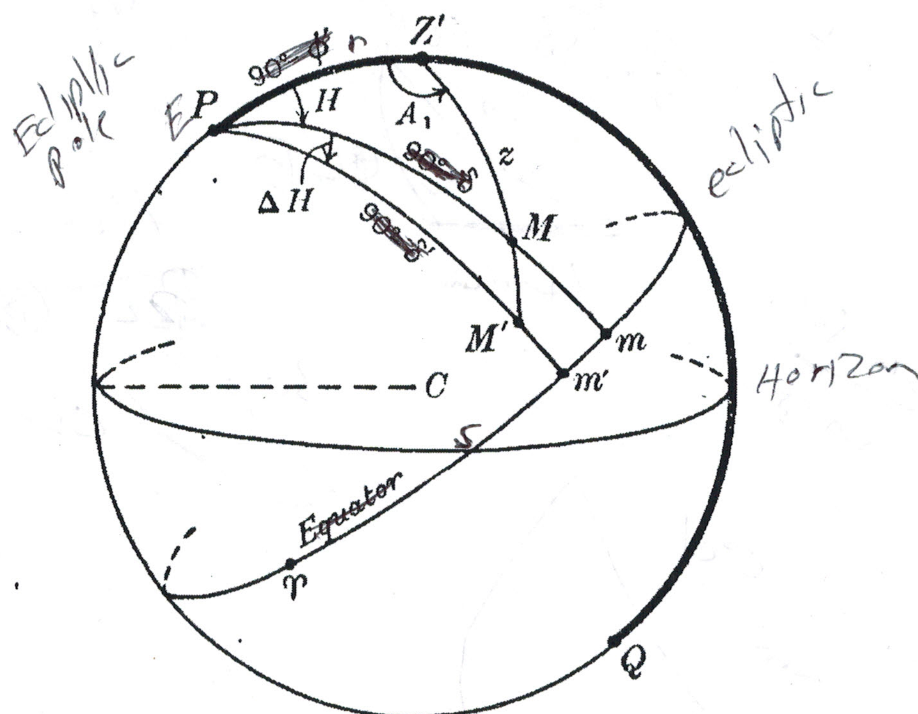
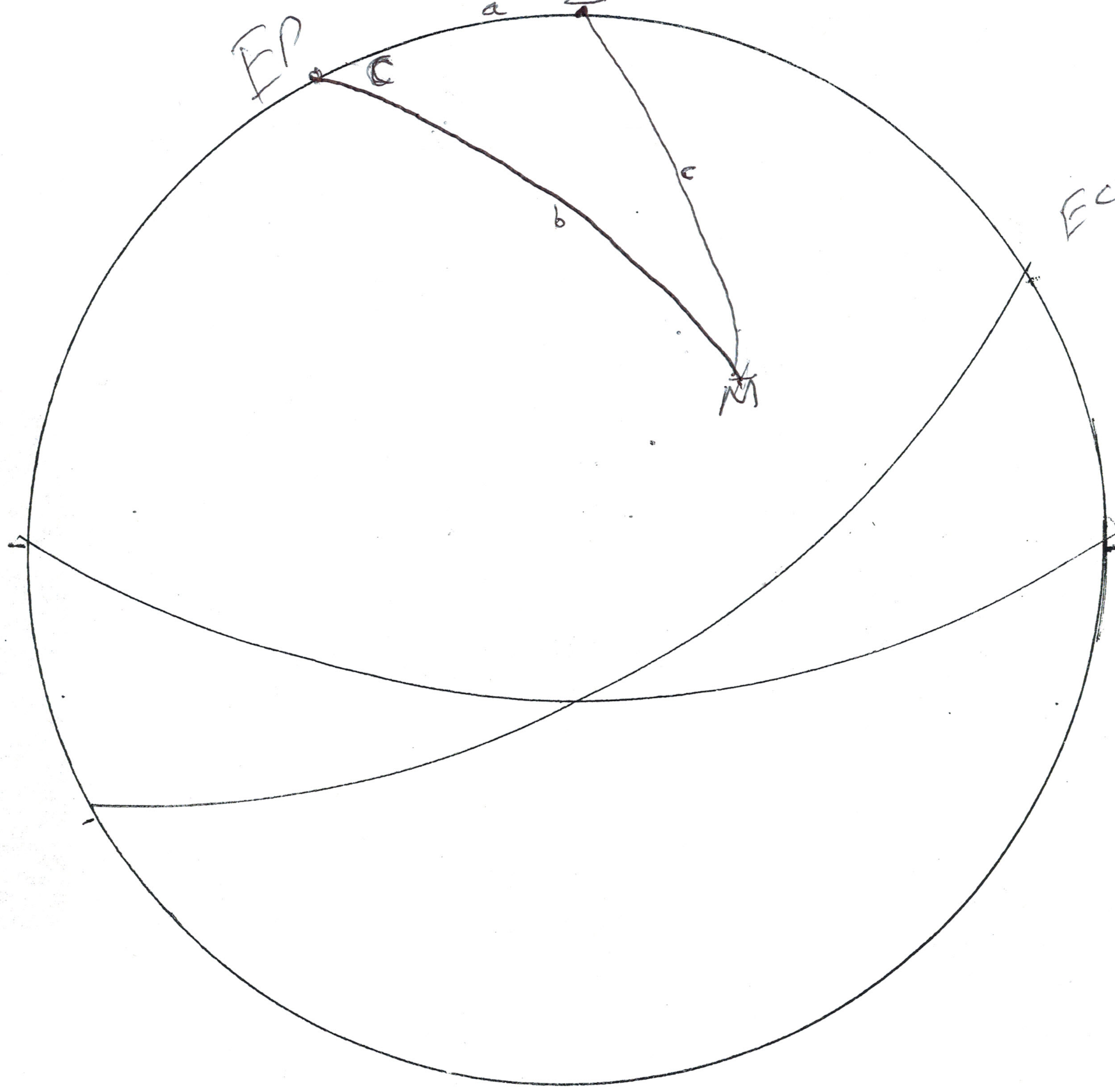
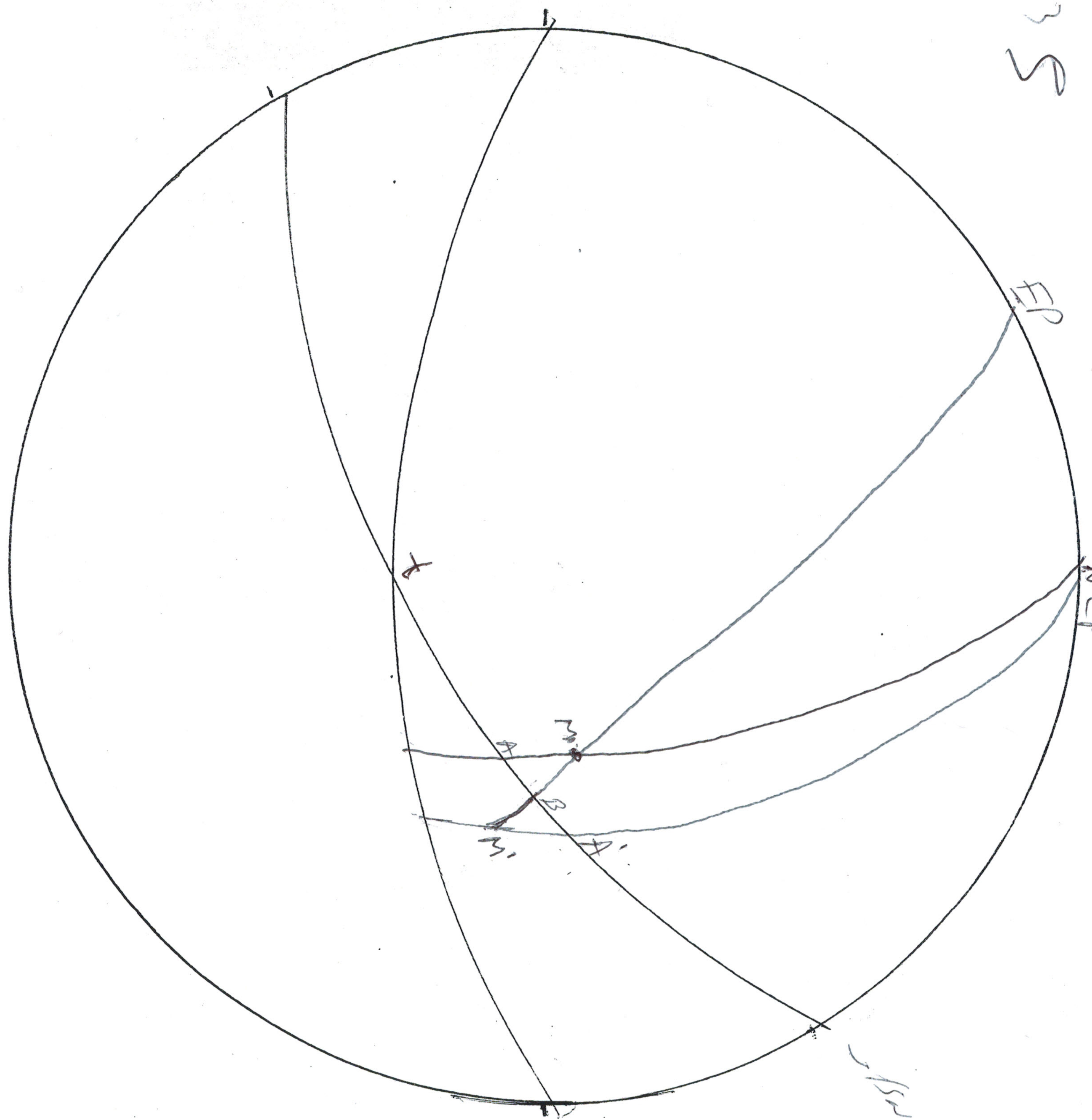
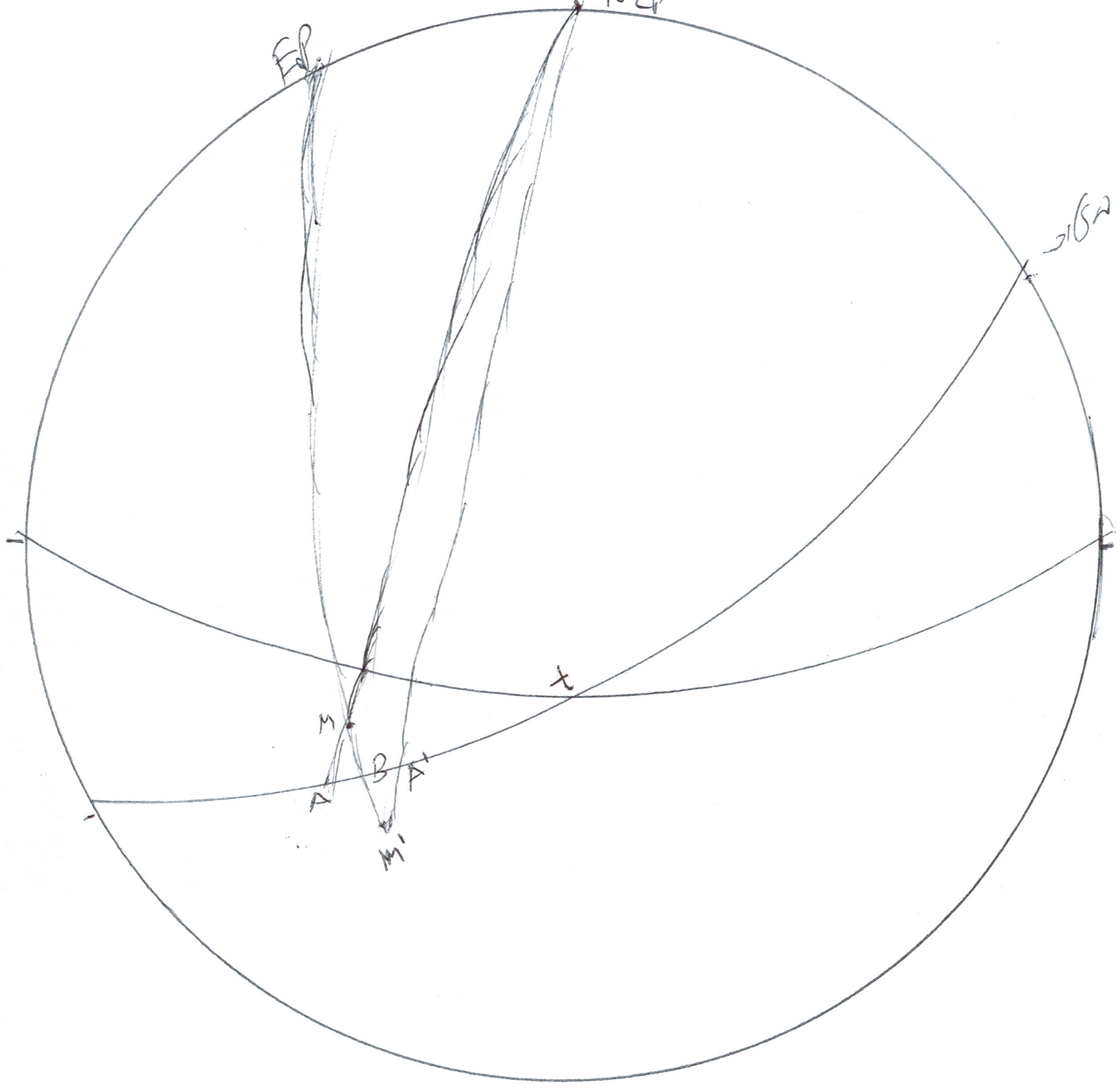


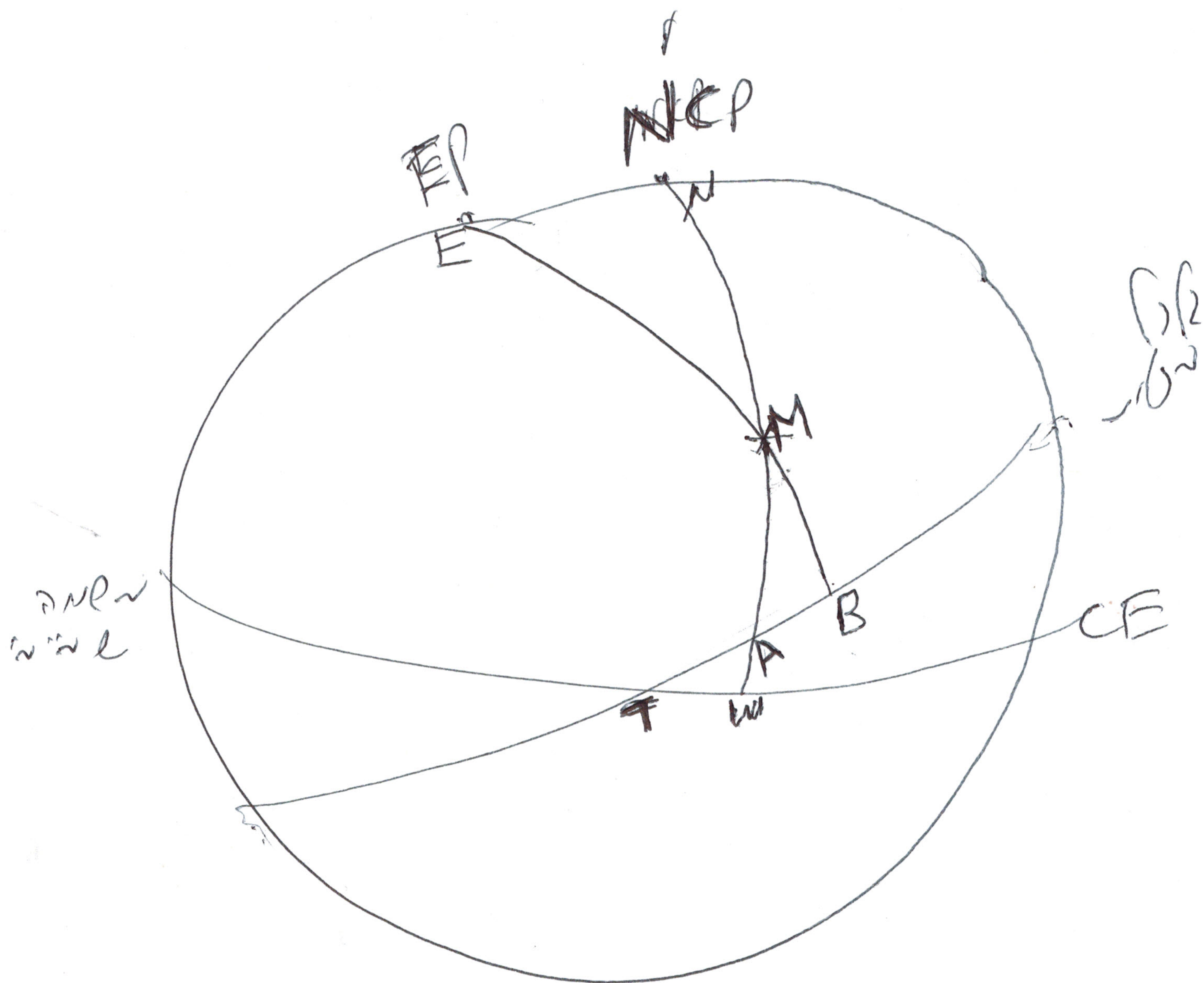

Fig. 83.

Consider, in Fig. 83, the celestial sphere centred at $C$ (the earth's centre); $P$ is the north pole, $Z'$ is the observer's geocentric zenith and $PZ' = 90° - \phi'$. Let $M$ be the position of the body on the celestial sphere as viewed from $C$; then $Z'M = z$. Produce the great circle arc $Z'M$ to $M'$ so that $Z'M' = z'$, $z'$ being the zenith distance of $M$ with respect to the observer at $O$. Then, since $z' = z + p$, we have $MM' = p$, the angle of parallax corresponding to the observation made at $O$. Let


EP
a
b
c
M
Ecliptic
North
South




Eq
M
B
A
A'
M'
t


NCP
EP
N
E
M
B
A
T
W
CE
משוה
שמימי
אורך

Y a W

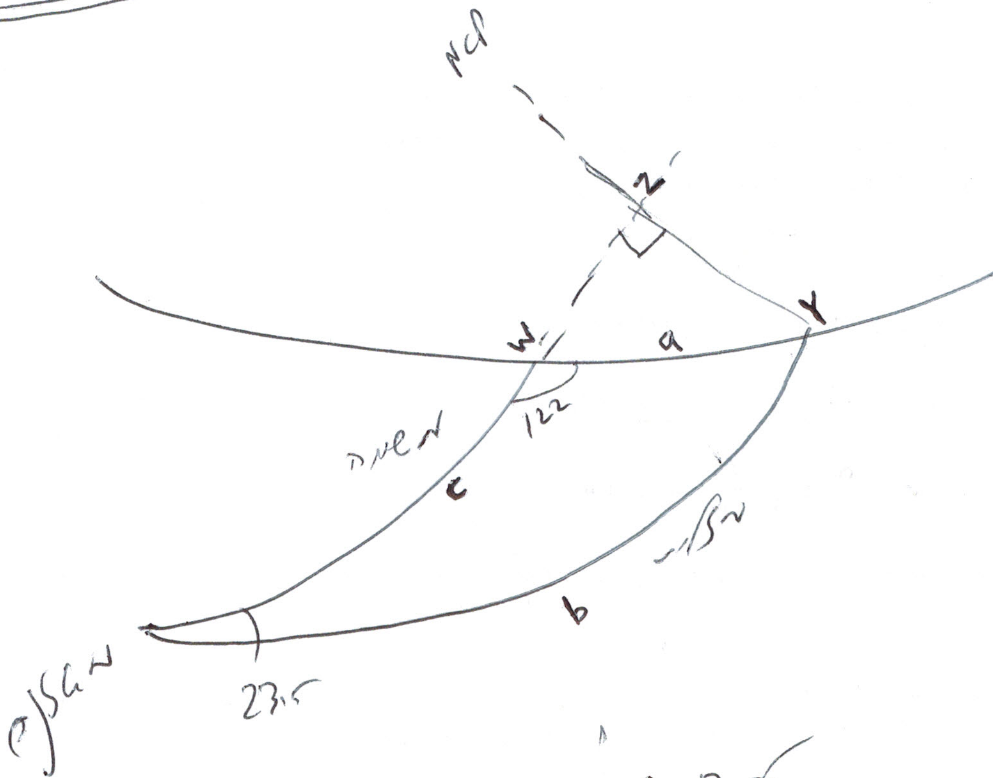
58

b

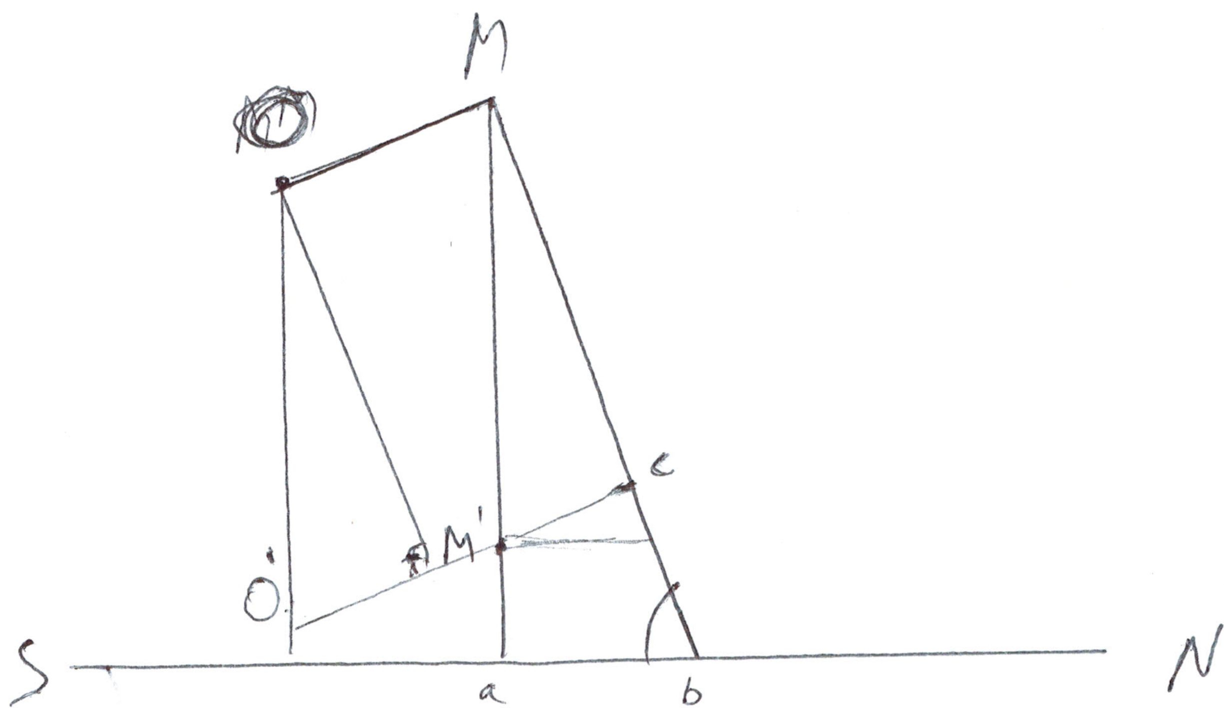
Z

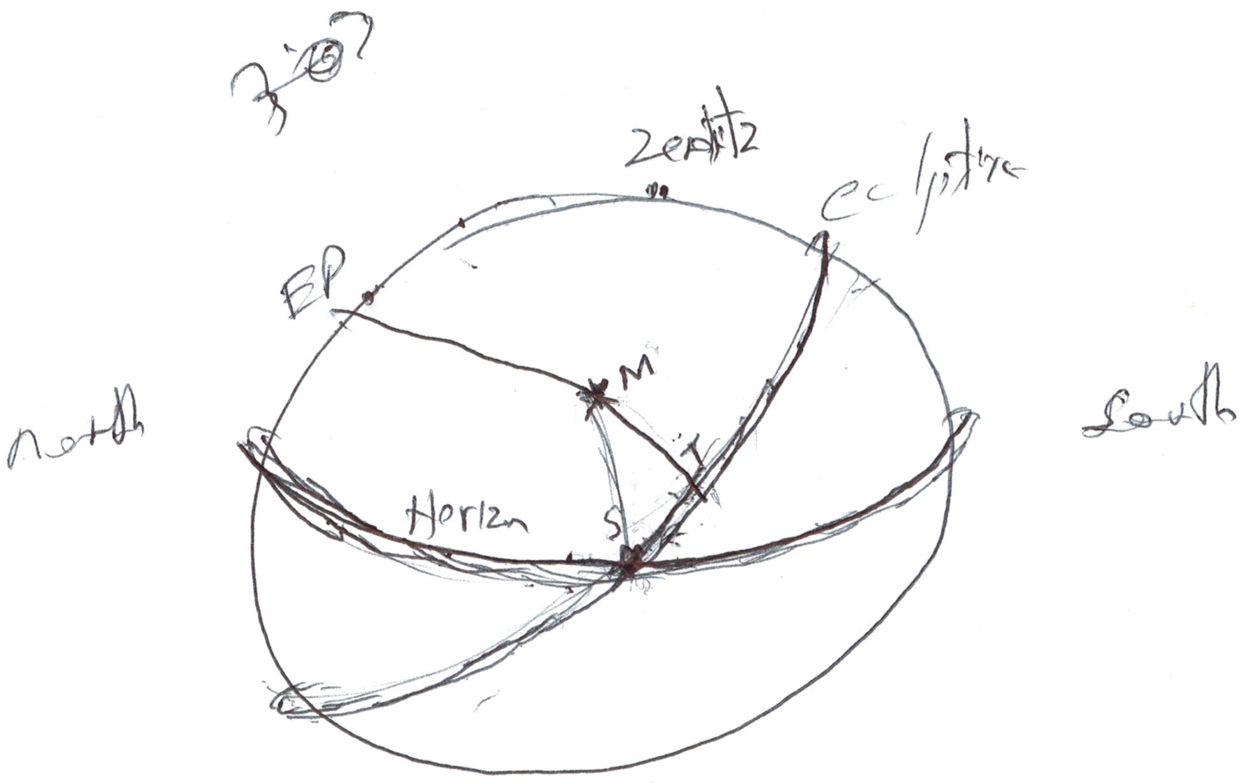
C

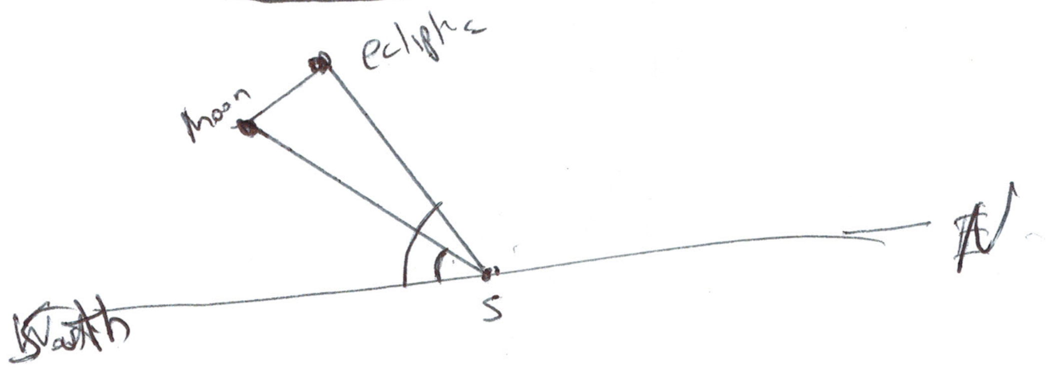
X 23.5°

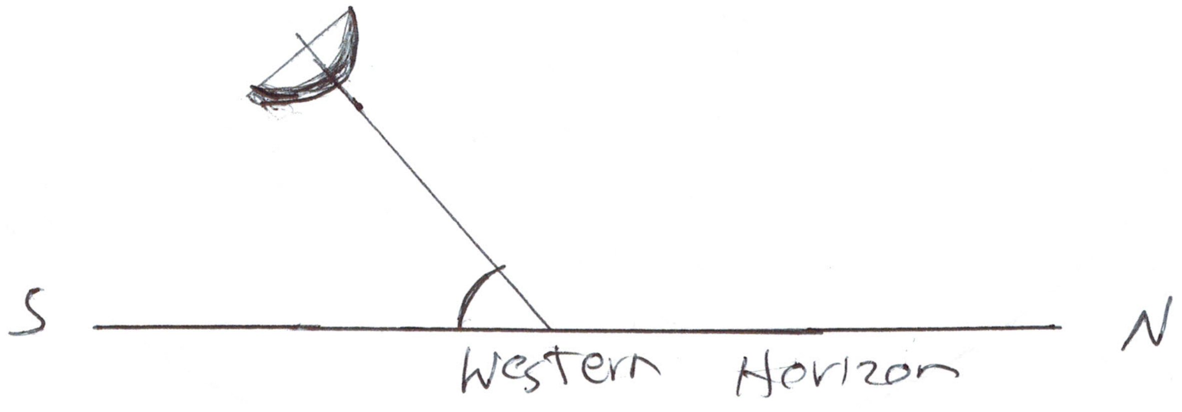



23.5
58
81.5


M
M'
O'
c
S
a
b
N


zenith
ecliptic
EP
M
north
South
Horizn
S


eclipt
moon
S
North


S
N
Western Horizon

We would give  samples for the year 5781 using the rambam's principles. Please get yourself a good scientific calculator and learn its  basic usage.

We start with  “starting points” taken from chazon shamayim by eitan tsikoni [printed 5778] the starting point is erev rosh hashanah 5753 the english date is 9/27/1992. 6 pm israeli time

| Here are the values: | per 24 hours |
|---|---|
| Emtsa shemesh=186.687 | .9856472 |
| Govah shemesh=102.8291 | .0000416 |
| Emtsa yereach=196.71 | 13.176397 |
| Emtsa maslul=228.71 | 13.064981 |
| Emtsa rosh=94.53175 | -.0529527 |

Let's start with erev rosh hashanah 5781. We must know how many days have passed since. The easiest way is to find the english date for erev RH 5781 [sep 18 2020]. For each year we take 365 days. And we add one day for each leap year. So for 9/27/2020 we would have 28*365+7 days passed [the 7 leap years are: 96 00 04 08 12 16 20] But we are asking for 9/18/2020 so we must minus 9 days and we get: 28*365+7-9=10218 days

Now the ripe time for viewing the moon is 20  minute after sunset [see RMBM] so we can find  sunset was at that date in jerusalem at 5:40 [this can be googled as “sunrise and sunset in jerusalem”] so 20 minutes afterward is

exactly! 6 pm. So we have an perfect “whole number” of days [10218]

Now we find each one [multiply by 10218 and add the ikkar, then subtract multiples of 360]
Emtsa shemesh ES=178.0300896
Govah shemesh GS=103.2541688
Emtsa yareach EY=193.134546
Emtsa maslul EM= 166.685858
Emtsa rosh ER=94.53175-10218*.0529527=273.4610614
[note that the rosh travels “backwards” so we must **subtract** .0529527--and then add multiples of 360 to find its real place]

Maslul hashemesh=ES-GS=74.7759208
Now for menus maslul [see first chapter]
se=sqrt [1.001197852+.06922*cos (maslul)]=1.008165344
Also sin (menas maslul)= .03461 * sin (maslul) / se
MM Menus maslul=1.89549064
Shemesh amiti SA=ES-MM=176.134599

Now we find merchak kuful MK=[EY-ES]*2=30.2089128
Now tosefes maslul TM:
tan TM= sin MK / [2 cos MK + sqrt(20.9085-sin MK)]
TM=4.605866865
Maslul Nuchon MN=EM+TM=171.2917249

Menus maslul yereach. tan MMY=
.481647443 sin MN / { cos MK +sqrt {20.9085-sin MK  sqr}
+.481647443 cos MN}
MMY=.847
Final yereach amiti YA=EY-MMY= 192.287546

Now we find rochav yereach
First find maslul rochav MR=YA-ER =278.8264846
Since this is greater than 180, we must subtract
278.8264846 from 360 and we get 81.1735154
sin RY= [sin 81.1735154 * sin 5]      RY=4.94064
[since MR is greater than 180, we have a rochav
deromi--that means that the moon is SOUTH of the
ecliptic]

Now orech rishon OR=YA-SA=16.152947
See rmbn 17:3 that if YA is between 90-270 we must
investigate further [unless  OR >24]
Rochav rishon RR=RY= -4.94064 [south is negative]

Finally we can calculate shinuy mareh.
First find the angle of inclination of the ecliptic towards the
horizon when the sun that is setting is at 176.134599

See section of “orech revii” and solve for C [that is the netiyas hamilkeh]
It is 34.56

We will use the shortcut for shinuy mareh
For shinuy mareh orech SMO .985*sin 34.56=.56
For shinuy mareh rochav SMR .985*cos 34.56=.81
Now we have orech shene=OSHN=YA-SMO=192.287546-.56=191.727546

[note: we define orech shene, the real place of the moon on the ECLIPTIC [after shinuy mareh] the RMBM has a bit different definition]

Rochav shene RSHN=RR-SMR=-4.94064-.81=-5.75064

For orech shlishi we must find maagal hayareach MY
That is .4348*RSHN*cos [191.727546]= 2.448
OSHL=OSHN-MY=191.727546-2.448=189.279546

Orech revii, see section for orech revii, solve for c
We first find c for the sun SA=176.134599 [that gives us the time that takes for 176.1346 to set [from 0-176..]]
Then find c for the moon 189.279546 [remember to subtract 180 first, then follow the rules..]
Then subtract the first outcome from the second

Follow the steps outlined in section orech revii and solve for c

The first c is 177.41713

The second c is 180+6.2145=186.2145546

Now subtract : 8.7974245 this is orech revii OREV

Finally keshes reiyah KR=OREV+[2/3*RSHN]= 4.964

Now see RMBM 17:15 that if KR is less than 9 degrees then forget about it...

The reason: the moon will set too fast after the sun [less that 20 minutes.], we have no chance of seeing it.

It has been suggested a more “neat” method:

We find the right ascension and declination of the sun an the moon, then we find the difference in their setting

First we will write the conversion formulas;

Sin dec= cos 23.5 sin lat + sin 23.5 cos lat sin long

Tan RA = [cos 23.5 sin long - sin 23.5 tan lat] / cos long

Also cos HA= -tan 32 tan dec

See proofs in end of document

We know the sun is 176.1346 long and 0 lat

The ra= 176.4543

The dec=1.54034
Now the moon long=191.727546 moon lat= -5.75064
ra=188.4952 dec= -9.93435

Now we find the time it takes for each dec. from prime meridian till setting we use: cos H= -tan 32 tan dec [for EY]
90.9628 for the sun 83.71677857 for the moon
But the moon is ahead with [188.4952-176.4543]=12.0409 degrees [thus it passes the prime meridian 12.0409*4 minutes earlier] so we calculate the final time difference from moonset to sunset;
12.0409 - [90.9628-83.71677857]= 4.79487.
Quite close to the above result...

Lets do for 30 th day of tishre 5781 october 18 2020, 20 minutes after sunset in jerusalem 5:03 is sunset and 5:23
So we have 29.9743 days from the above day and time
ES=207.5741
GS=103.2554157
EY=228.0878226
EM=198.3
ER=271.8738413
ES-GS=104.3186843 MM=1.937245
SA=205.637
MK=[EY-ES]*2=41.0274452 TM=6.2342232
MN=EM+TM=204.5342 YA=EY-MMY=230.4534

MR=YA-ER=318.58  sin RY= sin 41.42*sin 5
RY= -3.3055 [again rochav deromi]
OR=YA-SA= 24.8164
See RMBM 17:4 that when YA is from 90-270 and OR>24 we can be sure that it WILL be seen and no further investigation is needed

Next is nov 16 2020 that is 29 cheshvan 5781. 20 minutes after sunset is 4:59--so we have 28.98333 days past from the previous point in time. We will use 28.98 [about 5 minute earlier] for convenience

Here are the numbers:

| | | |
|---|---|---|
| ES=236.13816 | GS=103.2566 | EY=249.94 |
| EM=215.878 | ER=270.3393 | ES-GS=132.88156 |
| SA=234.650375 | MK=27.6037 | MN=220.08843 |
| YA=253.43646 | MR=343.09716 | RY=-1.45206 |
| OR=18.7861 | [see rambam---further investigation required] | |

Find small c and big C

| | | |
|---|---|---|
| c=39.867784 | C=41.79678 | SMO=.6565 |
| SMR=.73433 | OSHN=252.78 | RSHN=-2.1864 |
| MY=.281431 | OSHL=252.49857 | |

We deduct c of the sun from c of the moon, c of the moon is 56.13633144

OREV=16.268547 KR=14.811 see RMBM 17:15 more than 14 is ok [it is 56 minutes bet. Sunset and moon set, that is enough darkness to see the moon]

The next day is 29 kislev dec 15 2020 we can use 29 full days from previous point in time

ES=264.722 GS=103.2578 EY=272.0555

EM=234.76245 ER=268.80367 ES-GS=161.46413

SA=264.0702456 MK=14.667 TM=2.23777324

MN=237 MMY=-.07664 YA=272.13214

MR=YA-ER=3.32847 RY=.29 [rochav tsefoni]

OR=YA-SA=8.0619

See RMBM 17:3 if OR<10 don't bother! You can't see it!

here is how to use this chart: if you want to know how much degrees of CE [celestial equator sets while the ecliptic sets from 0-25 [in EY] the answer is:29.28572, [and you multiply this by 4, to get the amount in minutes] if you want to know how long it takes from 15 to 25 of the ecliptic to set, then find from 0-25, then from 0-15 and deduct the last from the first
column C gives us the inclination of the ecliptic towards the horizon [in EY] so when 30 [the beginnig of Shor] is on the horizon, the incl. is 77.8978

column D and E is from 180-185 [that will be 3.34205] from 180-210 will be 20.59555

say you want to know from 0-110 we do it like this: 180-110=70 now we look by 180+70= 250 we find 53.72 so we DEDUCT that from 180 [180-53.72=126.28] that is the amount of CE that sets while the ecliptic sets from 0-110
now from 0-180 the CE also sets 180, say you would like to know from 0-300 we know from 0-180=180 , so we need to know from 180-300, do the same as above, 360-300=60 60+180=240 180-44.51=135.5 now add this to 180=315.5

also we have netiyas hamilkeh for 350 the same like 10, for 170 the same like 190 and so on [because of symmetry] so with this chart we can BSD know the orech revii for any two points in the ecliptic [that is the amount of CE that sets together with the ecliptic]

| A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5.832249 | 81.39858 | 3.34205 | 34.55813 | 185 |
| 10 | 11.67113 | 81.09475 | 6.699585 | 34.73289 | 190 |
| 15 | 17.5229 | 80.58983 | 10.08812 | 35.02536 | 195 |
| 20 | 23.393 | 79.88613 | 13.52322 | 35.43727 | 200 |
| 25 | 29.28572 | 78.98716 | 17.0205 | 35.97095 | 205 |
| 30 | 35.20374 | 77.8978 | 20.59555 | 36.62921 | 210 |
| 35 | 41.14777 | 76.62465 | 24.2639 | 37.41514 | 215 |
| 40 | 47.11613 | 75.17628 | 28.04078 | 38.33193 | 220 |
| 45 | 53.10442 | 73.56356 | 31.94097 | 39.33255 | 225 |
| 50 | 59.10528 | 71.79992 | 35.97839 | 40.56941 | 230 |
| 55 | 65.10825 | 69.9015 | 40.16575 | 41.89393 | 235 |
| 60 | 71.09974 | 67.88722 | 44.51398 | 43.35604 | 240 |
| 65 | 77.06333 | 65.77865 | 49.03172 | 44.95367 | 245 |
| 70 | 82.98021 | 63.59964 | 53.72471 | 46.6822 | 250 |
| 75 | 88.82988 | 61.37582 | 58.59521 | 48.53398 | 255 |
| 80 | 94.59108 | 59.13378 | 63.64157 | 50.498 | 260 |
| 85 | 100.2428 | 56.90019 | 68.858 | 52.55966 | 265 |
| 87 | 102.4684 | 56.01495 | 70.99008 | 53.40772 | 267 |
| 88 | 103.5731 | 55.57488 | 72.06549 | 53.83612 | 268 |
| 89 | 104.6722 | 55.13678 | 73.147 | 54.26722 | 269 |
| 89.7 | 105.4381 | 54.83138 | 73.90762 | 54.5705 | 269.7 |
| שיעור הגלגל | אורך רביעי | נטיית המלכה | אורך רביעי | נטיית המלכה | שיעור הגלגל |

its inclination to the celestial equator is $M\hat{\Upsilon}R$, which is known as the *obliquity of the ecliptic*. Relative to the earth, the sun appears to move on the celestial sphere along the ecliptic—in the direction $Y\Upsilon M$—and twice yearly, at $\Upsilon$ and at $U$, its position on the celestial sphere coincides with the intersections of the ecliptic with the celestial equator. Between $\Upsilon$ and $M$ and between $M$ and $U$ the sun is on the north pole side of the equator; its declination is then north. Similarly between $U$ and $Y$ and

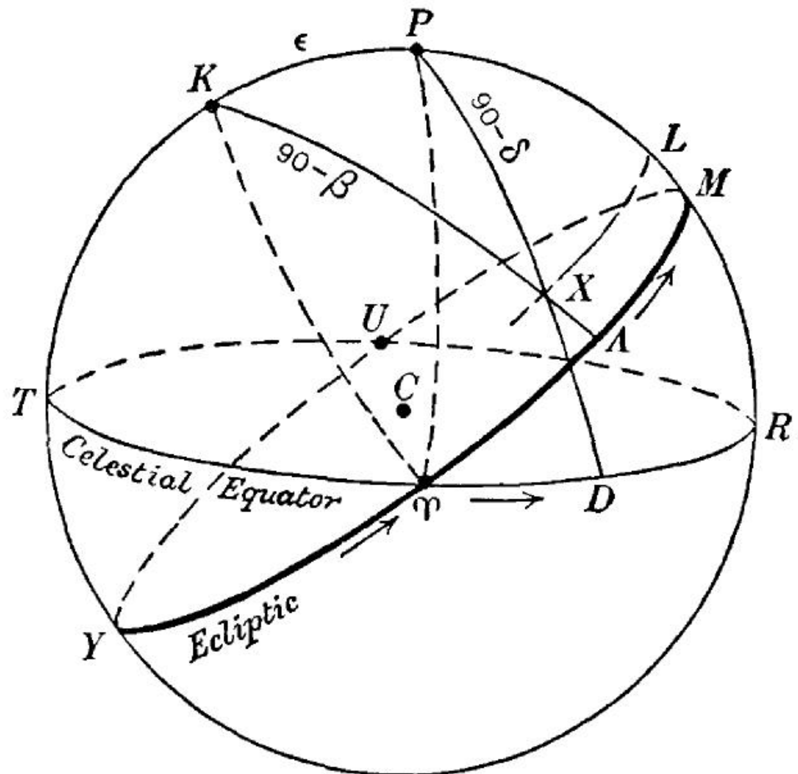



Fig. 21.

between $Y$ and $\Upsilon$ its declination is south. The position $\Upsilon$, at which the sun's declination changes from south to north, is the *vernal equinox*. It is in this way that the reference point $\Upsilon$, from which are measured the right ascensions of the stars, is obtained. Thus if $X$ is a star, its right ascension is $\Upsilon D$ or $\alpha$ measured along the equator from $\Upsilon$ eastwards, and its declination $\delta$ is $DX$. From the diagram it is seen that the right ascension and declination of the sun are both changing continually. When the sun is at $\Upsilon$, its right ascension and declination are both zero (this occurs about March 21—the *vernal equinox*); at $M$ the right ascension is $6^h$ and declination about $23\frac{1}{2}°$ N (this occurs about June 21—

the *summer solstice*); at $U$ the right ascension is $12^h$ and declination $0°$ (this occurs about September 21—the *autumnal equinox*) and at $Y$ the right ascension is $18^h$ and the declination about $23\frac{1}{2}°$ S (this occurs about December 21—the *winter solstice*).

**26.** *Celestial latitude and longitude.*

The position of a heavenly body can be referred to the ecliptic as fundamental great circle and the vernal equinox $\Upsilon$ as principal reference point. In Fig. 21 $K$ is the north pole of the ecliptic and $KXA$ is a great circle arc passing through $X$ and meeting the ecliptic in $A$. The arc $\Upsilon A$, measured from $\Upsilon$ to $A$ along the ecliptic in the *direction of the sun's annual motion*, i.e. eastwards, is called the *longitude* of the heavenly body $X$ and is measured from $0°$ to $360°$ round the ecliptic. The arc $AX$ is the *latitude* and north latitude is considered positive and south negative. If we know the star's right ascension and declination we can obtain its latitude ($\beta$) and its longitude ($\lambda$) from the triangle $KPX$; and *vice versa*. Now $\Upsilon$ is the pole of the great circle $KPMR$; hence $K\hat{P}\Upsilon = 90°$, and since $\Upsilon D = \Upsilon\hat{P}X = \alpha$, then $K\hat{P}X = 90° + \alpha$. Also $P\hat{K}\Upsilon = 90°$, and since $\Upsilon A = \Upsilon\hat{K}X = \lambda$, then $P\hat{K}X = 90° - \lambda$. Also $PX = 90° - \delta$ and $KX = 90° - \beta$. Let $\epsilon$ denote the obliquity of the ecliptic; it is the angle between the radii $CM$ and $CR$; thus the arc $RM = \epsilon$. But $KM = 90°$ and $PR = 90°$; hence $KP = \epsilon$. Applying the formulae **A**, **B** and **C**, we have

$$\cos KX = \cos PX \cos KP + \sin PX \sin KP \cos KPX,$$

$$\sin KX \sin PKX = \sin PX \sin KPX,$$

$$\sin KX \cos PKX = \cos PX \sin KP - \sin PX \cos KP \cos KPX,$$

or

$$\sin\beta = \sin\delta\cos\epsilon - \cos\delta\sin\epsilon\sin\alpha \;\ldots\ldots(10),$$

$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha \;\ldots\ldots(11),$$

$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\epsilon + \cos\delta\cos\epsilon\sin\alpha \;\ldots\ldots(12).$$

By a similar process, the right ascension $\alpha$ and the declination $\delta$ can be expressed in terms of $\beta$, $\lambda$ and $\epsilon$. The formulae are

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\epsilon + \cos\beta\sin\epsilon\sin\lambda,$$

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda,$$

$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\epsilon + \cos\beta\cos\epsilon\sin\lambda.$$

# משנה מסכת קינים פרק א

# עשר לזו ומאה לזו, המועט כשר

להבנת המשנה: לדוגמה: רחל הביאה 20 עופות [10 עולות ו10 חטאות] ולאה הביאה 28 עופות [14 עולות ו 14 חטאות] יחד יש לפנינו 20+28= 48 עופות. כל אלו העופות נתערבו יחד. כשבא הכהן להקריב, א"י להקריב למטה יותר מ10 עופות. שאם יקריב 11, שמא לקח את כל ה 11 מהעופות השייכות לרחל---והרי אין להביא מהעופות הללו יותר מ10!

# משנה מסכת קינים פרק ב

# כיצד שתי נשים לזו שתי קנים ולזו שתי קנים פרח מזו לזו פוסל אחד בהליכתו חזר פוסל אחד בחזירתו פרח וחזר פרח וחזר לא הפסיד כלום שאפילו הן מעורבות אין פחות משתים

דוגמה הנ"ל. יש לרחל 20 עופות וללאה 28 עופות. ופרח מרחל ללאה. מלאה לרחל [הקפה א!] שוב מרחל ללאה ומלאה לרחל [הקפה ב!]
אם יקריב מעופות רחל 10 חטאות, שוב א"י להקריב מעופות לאה אף חטאת אחת!
[שמא יקריב עוף אחד עשר מעופות רחל, למטה] אם יקריב רק 8 מעופות רחל, למטה [וכן 8 למעלה] שפיר יכול להקריב מעופות לאה 12 למטה, ואז אף אם שני עופות רחל נשארו stuck אצל עופות לאה [א"א שישארו stuck יותר!] ועשאן למטה---הרי בסה"כ עשה רק 10 עופות רחל למטה [המקסימום שרשאי לעשות!]

# משנה מסכת קינים פרק ב

# לזו אחת לזו שתים לזו שלש לזו ארבע לזו חמש לזו שש לזו שבע פרח מן הראשונה לשניה לשלישית לרביעית לחמישית לששית לשביעית חזר פוסל אחד

# בהליכתו ואחד בחזירתו הראשונה והשניה אין להם כלום השלישית יש לה אחת הרביעית יש לה שתים החמישית יש לה שלש הששית יש לה ארבע השביעית יש לה שש פרח וחזר פוסל אחד בהליכתו ואחד בחזירתו השלישית והרביעית אין להם כלום החמישית יש לה אחת הששית יש לה שתים השביעית יש לה חמש פרח וחזר פוסל אחד בהליכתו ואחד בחזירתו החמישית והששית אין להם כלום השביעית יש לה ארבע ויש אומרים השביעית לא הפסידה כלום ואם פרח מבין המתות לכולם הרי כולם ימותו:

לדוגמה: יש ABCDEFG לA יש שני עופות [אחד חטאת ואחד עולה וכו' לG יש 14 עופות [7 חטאות ו7 עולות]
פרחה אחת וחזרה ["הקפה אחת"]
אם יקריב שני חטאות מC, שמא מC נשאר STUCK אצל B ומקריבו חטאת, גם מקריב שני חטאות מC גם אחד מעופות השייכים לC נשאר STUCK אצל E ומקריבו למטה בסך הכל מקריב 4 עופות למטה מעופות השייכים לC! [וזה יותר מהמורשה [רק 3 רשאי]

פרחה וחזרה---פרחה וחזרה ["שני הקפות"]

אם יקריב מBOX F שלשה עופות לחטאת, שמא כולם שייכים ל MR F, + שמא נשארו STUCK ארבע עופות של MR F במקומות אחרים, ושמא יתגלגל הדבר שכולם ייקרבו למטה---הרי יעשה למטה מעופות של MR F שבע---וזה יותר מן המורשה [F מחוייב רק 6 עופות למטה]

כתבתי בקיצור רב----ואידך פירושא היא זיל גמור!!!!

# נתנתם לכוהן--הכוהן צריך לעשות שלוש פרידין למעלן, ואחת למטן. לא עשה כן, אלא עשה שתיים מלמעלן ושתיים מלמטן, ולא נמלך--צריכה להביא עוד פרידה אחת, ויקריבנה למעלן, ממין אחד;

הציור: יש לאשה לידה. גם נדרה להביא קן. והביאה שני תורים ועוד שני תורים
והכהן הקריב שתי תורים למעלה ושתי תורים למטה
אז חייבת: עוד תור למעלה בשביל עולת חובתה

# משני מינין, תביא שתיים.

הציור: כדלעיל והביאה שתי תורים. ושני בני יונה.

שתי אפשריות: 1) הכהן הקריב התורים מלמעלה, ובנ"י למטה
2) בנ"י למעלה, ותורים מלטה

התקון: תביא עוד תור ועוד בן יונה ויקריבם מלמעלן
הטעם: נדרה יצתה ממנ"פ [שהרי נעשו 2 עופות למעלה]----
אם קרה 1 הרי חייבת בנ"י לעולת חובתה
אם קרה 2 הרי חייבת תור לעו"ח

# פירשה נדרה--צריכה להביא עוד שלוש פרידין, ממין אחד;

הציור: כדלעיל מעשיה: הביאה שתי תורים ועוד שתי תורים. וגם אמרה על אחת מן הקנים "זו לנדרי".
מעשי כהן יש שתי אפשריות:
1) הקריב "המפורש" כולו למעלה, והאחר כולו למטה
2) הקריב "המפורש" למטה, והאחר למעלה

התקון: תביא שלש תורים ותקריב אחד למטה, ושניים למעלה

הטעם: אם קרה 1, חייבת רק תור אחד לעו"ח אם קרה 2, חייבת 2 תורים לנדרה ותור אחד לחטאת [אבל תור עו"ח **לא צריכה!**]

# ומשני מינין, תביא ארבע.

הציור:כדלעיל מעשיה:הביאה שני תורים ואמרה "זה יהא לנדרי" גם הביאה שני בני יונה ואמרה "זה לחובתי"

מעשי כהן יש שתי אפשריות:

1) הקריב התורים למעלה ובנ"י למטה
2) התורים למטה ובנ"י למעלה

התקון:תביא שתי תורים ותקריב שניהם למעלה. ושני בני יונה אחד למעלה ואחד למטה

הטעם: אם קרה 1, חייבת רק בן יונה אחד לעולת חובתה. אם קרה 2, חייבת שני תורים לנדרה, ובן יונה לחטאת

# קבעה נדרה--צריכה להביא עוד חמש פרידין, ממין אחד;

הציור: יש לאשה לידה. גם נדרה להביא תורים **או שמא** נדרה להביא בני יונה

מעשיה: הביאה שתי תורים ואמרה "אלו לנדרי" ועוד שתי תורים

יש ארבע אפשריות: נדרה מעיקרא להביא תורים...

1) והקריב ה"מפורש" למעלה, והאחר למטה
2) והקריב ה"מפורש" למטה, ואחר למעלה
3) שמא נדרה מעיקרא להביא בני יונה, והקריב המפורש למטה, והאחר למעלה
4) שמא נדרה מעיקרא להביא בני יונה, והקריב המפורש למעלה והאחר למטה

התקון: תביא 3 תורים [2 למעלה ואחד למטה] ושני בני יונה [למעלה]

הטעם: אם קרה 1) חייבת תור עו"ח
2) חייבת שתי תורים לנדרה, ועוד תור לחטאת
3) חייבת שני בני יונה לנדרה, ועוד תור לחטאת
4) חייבת שני בנ"י לנדרה ותור עו"ח

# ומשני מינין, תביא שש.

...נדרה להביא תורים **או שמא** נדרה להביא בני יונה.  והביאה קן תור וקן בנ"י  והקריב הכהן אחד מהקנין למעלה, ואחד מהן למטה----נמצא יש כאן 4 מקרים אפשריים

1) אמרה הר"ע תורין---קרבו תורין למעלה ובנ"י למטה   אז חייבת...בן יונה אחד לעולת חובה
2) אמרה הר"ע תורין---קרבו בנ"י למעלה ותורין למטה   אז חייבת... שני תורין לנדרה וגם תור לעו"ח
3) אמרה הר"ע בנ"י---קרבו בנ"י למעלה ותורין למטה   א"ח...תור אחד לעו"ח
4) אמרה הר"ע בנ"י---קרבו תורין למעלה ובנ"י למטה   א"ח..שני בני יונה לנדרה וגם  ב"י לעו"ח

למעשה תקנתה 2 תורין לנדרה, 2 בנ"י לנדרה, גם 2 בנ"י [או תורים] לעו"ח ולחטאת.

טעם הדבר: חוששת למקרה 2 או שמא 4. על כן צריכה להביא שני תורין ושני בנ"י לנדרה ---גם תור ובן יונה לעו"ח ---אבל חטאת חובה וודאי שיצתה [מקרה 4&1 על ידי בן יונה, מקרה 3&2 על ידי תור]

# נתנתם לכוהן, ואין ידוע מה נתנה, והלך הכוהן ועשה, ואין ידוע מה עשה--צריכה להביא עוד ארבע פרידין לנדרה, ושתיים לחובתה, וחטאת אחת;

יש כאן 20 אפשריות---10 על הצד שפירשה נדרה תור ו10 על הצד שפירשה בנ"י. גם יש ספק אם הביאה שני הקנין בנ"י/שני הקנין תור/אחד תור ואחד בנ"י. גם יש ספק אם שניהם למטה/שניהם למעלה/אחד למטה ואחד למעלה   ונעשה קוד כדיי שיתקצר הדבר אות הראשון מרמז על מה שפירשה נדרה [ת=תור=שאמרה הר"ע תורים] [י=בנ"י=שאמרה הר"ע בנ"י] אות השני מרמז מה באמת הביאה אל הכהן [א=שני קנים בנ"י, מ=קן תור וקן בנ"י, ש=שני קנים תור] אות השלישי ורביעי מרמזים מה עשה הכהן בקנים הללו? [ל=מעלה,ט=מטה]

דוגמה: תמטט  [פירשה תורים, הביאה קן תור וקן בנ"י, הכהן הקריב הכל למטה]  ימלט [פירשה בני יונה, הביאה אחת תור ואחת בנ"י, הכהן הקריב את התורים למעלה ואת בני היונה למטה [כשיש שני אותיות שונות בסוף הקוד, הראשון על התורים והשני על בני היונה]

יכולים ליצור 20 מקריות שונות ונפרטם בס"ד

תשלל תשלט תשטט   תאלל תאלט תאטט   תמלל תמלט תמטל תמטט
ישלל  ישלט  ישטט   יאלל יאלט  יאטט   ימלל ימלט  ימטל ימטט

הפסק: צריכה להביא שני תורי שני בנ"י לנדרה.    תור ובן יונה לחובתה,  ועוף אחד לחטאת

הטעם: תא... לא יצאה כלל נדרה. שהרי נדרה תורים והביאה רק בני יונה. וכן יש..לא יצאה כלל מאותו הטעם. על כן צריכה שני תורים ושני בנ"י לנדרה.

אם קרה תמטט, צריכה שתי תורים לנדרה [שהרי לא הביאה לנדרה [למעלה] כלום!] גם צריכה עולת **תור** לחובתה--שהרי הביאה תור עבור חטאתה וממילא **נתחייבה** להביא גם עולת חובה של **תור**

אם קרה יאטט, צריכה שני בני יונה לנדרה [שהרי לא הביאה לנדרה [למעלה] כלום!] גם צריכה **בן יונה** לעו"ח [שהרי יצתה ידי חטאתה בבן יונה, וממילא יצאה עו"ח **רק** ע"י ב"י]

אם קרה כל אלו שמסיימים ב"לל" [כגון תשלל] עדיין חייבת בחטאת העוף!

ע"כ תביא חטאת העוף מאיזה שתרצה. [בן יונה **או** תור] עו"ח תור. עו"ח בן יונה. שני בנ"י נדרה. שתי תורים נדרה          הרי שבע!

# בן עזאי אומר, שתי חטאות.

לבן עזאי אם יצתה כבר ידי עו"ח, חייבת להביא חטאת מאותו המין---אם קרה תשלל **חייבת** להביא תור לחטאת---אם קרה יאלל **חייבת** להביא בן יונה לחטאת